سلسلۂ نصاب تعلیم جامعۂ عثمانیہ

علم ہیئت کروی

حصہ اول

تصنیف

سر رابرٹ بال ایم۔ اے، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۸ھ م سنہ ۱۳۴۸ف م سنہ ۱۹۳۹ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

علم ہیئت کروی

حصۂ اول

پہلا باب

اساسی ضابطے

دوسرا باب

کروی محددوں کا استعمال

دفعہ صفحہ

تیسرا باب
زمین کی شکل اور نقشہ کشی

چوتھا باب

کرۂ سماوی

پانچواں باب

صعود مستقیم اور میل۔ سماوی عرض بلد اور طول بلد

دفعہ صفحہ

چھٹا باب
کرۂ ہوائی کا انعطاف

ساتواں باب

دفعہ صفحہ

کپلر اور نیوٹن کے کلئے اور انکا استعمال

آٹھواں باب

استقبال اور کبو

دفعہ صفحہ

نواں باب

کوکبی وقت اور اوسط وقت

دسواں باب

سورج کی ظاہری سالانہ حرکت

۷۸۶

علم ہیئت کروی

حصۂ اول

پہلا باب

اساسی ضابطے

دفعہ صفحہ

۱ ـ علم مثلث کروی ۔

فرض کرو کہ ایک مثلث کروی کے ضلع اور زاوے حسب معمول ا، ب، ج، ا، ب، ج ہیں علم مثلث کروی کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

جم ج = جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج، ...... (۱)

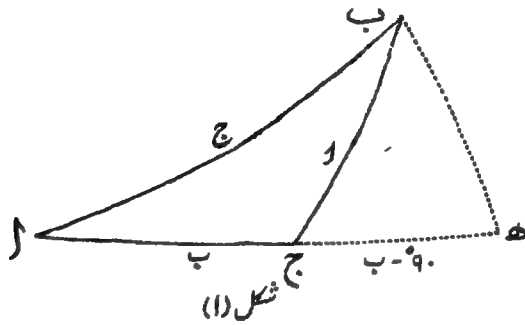
جب ج جم ا = جم ا جب ب ـ جب ا جم ب جم ج ، .... (۲)

جب ج جب ا = جب ا جب ج .... (۳)

ضابطہ (۲) کو (۱) سے آسانی کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا ج کو (شکل ۱) ھ تک اتنا خارج کرو کہ

ج ھ = ۹۰° ـ ب

شکل (۱)

تب شلث ب ا ھ سے بموجب ضابطہ (۱)

جم ب ھ = جب ج جم ا

اور شلث ب ج ھ سے

جم ب ھ = جم ا جب ب ـ جب ا جم ب جم ج

جم ب ھ کی یہ دو قیمتیں مساوی رکھنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح نمونہ (۲) کے مختلف ضابطے، حافظہ پر زیادہ بار ڈالے بغیر، حسب ضرورت لکھ دئے جا سکتے ہیں۔

مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) سادہ ترین مساواتیں ہیں جو اس وقت استعمال کی جا سکتی ہیں جبکہ کروی شلث کے دو ضلع ا اور ب اور درمیانی زاویہ ج دئے گئے ہوں اور اس کے اجزاء ا اور ج معلوم کرنا مطلوب ہو۔ بادی النظر میں یہ عجیب معلوم ہوتا ہے کہ صرف دو مقداروں کو دریافت کرنے کے لیے تین مساواتوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ لیکن ٹھیک حل

حاصل نہیں ہو سکتا اگر ا اور ج کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں تین سے کم ہوں۔

مثلاً فرض کرو کہ صرف مساواتوں (۱) اور (۲) کا زوج دیا گیا ہے اور ا اور ج کی قیمتیں معلوم کر لی گئی ہیں جو ان مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ یہی مساواتیں قیمتوں کے تین اور جٹوں

ا، ج ؛ ۱۸۰° - ا، ۳۶۰° - ج ؛ ۱۸۰° + ا، ۳۶۰° - ج

سے بھی پوری ہوتی ہیں۔ لیکن اگر یہ بھی مقصود ہو کہ جو قیمتیں اختیار کی جائیں وہ مساوات (۳) کو بھی پورا کریں تو قیمتوں کے آخری دو جٹوں کو خارج کر دینا پڑتا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جب مساواتیں (۱)، (۲) اور (۳) سب کی سب، ا اور ج سے پوری ہوتی ہوں تو ایک دوسرا حل صرف

۱۸۰° + ا، ۳۶۰° - ج رہ جاتا ہے۔

اس باقی ماندہ ابہام کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہئے کہ کرہ پر کے دو نقطوں ا اور ب کو ملانے والی، بڑے دائرہ کی قوس کا طول بالعموم مبہم ہوتا ہے۔ یہ طول اب ہو سکتا ہے یا ۳۶۰° - اب۔ اسی طرح اگر دو بڑے دائروں کے درمیانی زاوئے کی تعریف اُس قوس سے کی جائے جو دو خاص قطبوں کے درمیان ہو تو بھی یہاں یہ ابہام پیدا ہوگا کہ قطبوں کو ملانے والی دو قوسوں میں سے کونسی قوس زاویہ کا ناپ ہے۔ ہر مخصوص سوال کے حالات سے بالعموم یہ امر واضح ہوگا کہ ان دو حلوں ا، ج یا ۱۸۰° + ا، ۳۶۰° - ج میں سے کونسا حل مطلوب ہے۔

اگر ایک ضلع اور دو متصلہ زاوئے دئے جائیں تو دو نئے ضابطے (۴) اور (۵)، ضابطہ (۳) کے ساتھ لینے ہوں گے

جم ج = - جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج (۴)

جب ج جم ا = جم ا جب ب + جب ا جم ب جم ج (۵)

جب ج جب ا = جب ا جب ج (۳)

ضابطے (۴) اور (۵)، علی الترتیب (۱) اور (۲) سے قطبی مثلث کا

(۳) عام اصول استعمال کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ وہ اصول یہ ہے کہ کوئی ضابطہ جو سب کروی مثلثوں کے لیے درست ہو درست رہتا ہے اگر اس میں ا، ب، ج، ا، ب، ج کی بجائے قطبی مثلث کے اجزاء

۱۸۰°-ا، ۱۸۰°-ب، ۱۸۰°-ج، ۱۸۰°-ا، ۱۸۰°-ب، ۱۸۰°-ج

علی الترتیب درج کر دیے جائیں۔

اگر دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ یا دو زاویے اور درمیانی ضلع دیے جائیں تو بھی مثلث ایسے ضابطوں سے حل ہو سکتا ہے جو (۲) اور (۳) سے آسانی کے ساتھ اخذ کیے جا سکتے ہیں اور جو اس نمونہ کے ہیں

مم ا جب ب = مم ا جب ج + جم ب جم ج (۶)

اگر ا، ب، اور ج دیے گئے ہیں تو اس ضابطہ سے مم ا کی تعیین ہوگی اور اس لیے ا معلوم ہوگا کیونکہ صفر اور ۱۸۰° کے درمیان ا کی ہمیشہ ایک قیمت ہوگی جو +∞ سے -∞ تک مم ا کی کسی قیمت کے جواب میں ہوگی۔ بلاشبہ ۱۸۰° + ا بھی ایک حل ہے۔

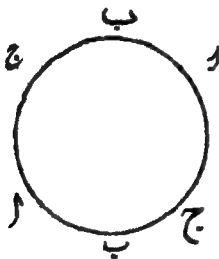
اسی طرح اگر ا، ج، ب دیے گئے ہوں تو اس ضابطہ سے مم ا معلوم ہو سکے گا۔

یاد رہے کہ ضابطہ (۶) مثلث کے ایسے چار متصلہ اجزاء کے درمیان رشتہ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ انہیں ایک دائرہ کے گرد لکھا جائے اب چونکہ ہم کسی ایک عنصر سے ابتدا کر سکتے ہیں اس لیے اس نمونہ کے چھ ضابطے ہیں۔

نمونہ (۶) کے ضابطوں کے لیے حسب ذیل قاعدہ دیا جاتا ہے[۱] :-

ب ا ج ب ا ج

شکل (۲)

[۱] دیکھو علم مثلث کروی مصنفہ ٹوڈ ہنٹر صفحہ ۲۷ (سنہ ۱۹۰۳ء)

اِن ضابطوں میں سے کسی ایک میں شریک ہونے والے زاویوں اور ضلعوں میں سے ایک زاویہ دو ضلعوں کے درمیان واقع ہوتا ہے اِس کو "داخلہ زاویہ" کہا جاسکتا ہے۔ اسی طرح ایک ضلع دو زاویوں کے درمیان واقع ہوتا ہے اِس کو "داخلہ ضلع" کہا جا سکتا ہے۔ تب ضابطہ کو اِس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :۔

(داخلہ ضلع کی جیب التمام) (داخلہ زاویہ کی جیب التمام)
= (داخلہ ضلع کی جیب) (دوسرے ضلع کا مماس التمام)
ـ (داخلہ زاویہ کی جیب) (دوسرے زاویہ کا مماس التمام)

مثلاً چار اجزاء، ا، ب، ج، ب پر مشتمل ضابطہ لکھ لینے کے لیے ج داخلہ زاویہ ہے اور ا داخلہ ضلع، پس ضابطہ (٦) حاصل ہوتا ہے

جم ا جم ج = جب ا مم ب ـ جب ج مم ب

اگر دو ضلع ا، ج اور ا کے مقابل کا زاویہ ا دئے جائیں تو (٣) سے جب ج حاصل ہوتا ہے۔ اگر جب ج > ا تو یہ مسئلہ ناممکن ہے۔ اگر جب ج < ا تو یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ ج کو اِس کی دو تکمیلی قیمتوں میں سے کونسی قیمت دینی چاہیئے اور جب تک کہ کوئی مزید بات معلوم نہ ہو جس سے یہ ظاہر ہو سکے کہ ج حادہ ہے یا منفرجہ یہ مسئلہ مبہم رہتا ہے۔

اگر دو زاوئے اور اِن میں سے ایک کے مقابل کا ضلع دئے جائیں تو ضابطہ (٣) سے دوسرے زاوئے کے مقابل کا ضلع معلوم ہوگا جو حسب سابق اُس ابہام کے تحت ہوگا جو قوس اور اس کے تکملہ کے درمیان ہوتا ہے۔

اگر اِن دو صورتوں میں ابہام کو رفع کر لیا جائے تو یہ مسئلہ اُس مسئلہ میں تحویل ہو جاتا ہے جس میں دو ضلع اور اِن دونوں ضلعوں کے مقابل کے زاوئے دئے گئے ہوں۔ مساواتوں (١) اور (٢) سے حسب ذیل ضابطہ آسانی کے ساتھ اخذ کیا جا سکتا ہے

$$\text{مس ب} = \frac{\text{مس ا جم ج + مس ج جم ا}}{\text{ا ـ مس ا جم ج مس ج جم ا}}$$

اور (۲) سے یہ معلوم ہوگا کہ اس جملہ میں ب لینا چاہئیے یا ۱۸۰° + ب ۔
عمل حساب میں اختصار پیدا ہوگا اگر ہم یہ فرض کریں کہ

مس طہ = مس ا جم ج ، مس فہ = مس ج جم ا

اس لیے

ب = طہ + فہ

قطبی مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ـمس ب} = \frac{\text{مس ا جم ج + مس ج جم ا}}{\text{۱ ـ مس ا جم ج مس ج جم ا}}$$

جس سے ب معلوم ہوتا ہے کیونکہ ب اور ب + ۱۸۰° کے درمیان کا ابہام (۵) سے رفع ہوجاتا ہے ۔ نیز اگر ہم رکھیں

مس طہَ = مس ا جم ج ، مس فہَ = مس ج جم ا

تو

ب = ۱۸۰° ـ طہَ ـ فہَ

اگر کروی مثلث کے تین ضلع دیے گئے ہوں تو اس کا حل حسب تفصیل ذیل معلوم کیا جا سکتا ہے ۔ فرض کرو کہ ۲س = ا + ب + ج تو

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{جب (س ـ ب) جب (س ـ ج)}}{\text{جب س جب (س ـ ا)}}} \qquad (۷)$$

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح متشابہ ضابطوں سے ب اور ج معلوم ہوتے ہیں ۔

اگر تین زاویے ا، ب، ج دیے جائیں تو رکھو

۲س = ا + ب + ج

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{-\frac{\text{جم س جم (س ـ ا)}}{\text{جم (س ـ ب) جم (س ـ ج)}}} \qquad (۸)$$

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح ب اور ج ۔

(۵) اگر مثلث قائم الزاویہ ہو تو اس اہم صورت میں ہم ج کو ۹۰° کے مساوی رکھتے ہیں اور (۱)، (۲) (۳) کے مانند ضابطوں سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب ج جم ا = جم ا جب ب .... (۹)

جم ج = جم ا جم ب .... (۱۰)

جب ج جب ا = جب ا .... (۱۱)

جم ا = مس ب مم ج .... (۱۲)

مس ا = مس ا قم ب .... (۱۳)

جم ا = جم ا قم ب .... (۱۴)

قط ج = مس ا مس ب .... (۱۵)

یہ ضابطے نیپیر کے قاعدوں کی مدد سے آسانی کے ساتھ لکھ لیے جا سکتے ہیں۔ اس میں مقداروں ا، ب، (۹۰° - ا)، (۹۰° - ج)، (۹۰° - ب) کو جو اکثر "دائری اجزاء" کہلاتے ہیں ایک دائرہ میں حسب شکل (۳) لکھا جاتا ہے۔ کسی ایک دائری جزو کو "درمیانی" سمجھو تو اس کے طرفین کے اجزاء "متصلہ" کہلاتے ہیں اور باقی دو "متقابلہ"۔ پھر نیپیر کے قاعدوں سے جو حسب ذیل ہیں (۱۰) تا (۱۵) ضابطوں کو لکھ لیا جاتا ہے :-

شکل (۳)

درمیانی کی جیب = متصلوں کے مماسوں کا حاصل ضرب،

درمیانی کی جیب = متقابلوں کی جیوب التمام کا حاصل ضرب

اس طرح دس ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں کیونکہ ان پانچ دائری اجزاء میں سے کسی ایک کو درمیانی جزو کے طور پر لے سکتے ہیں۔

اور (۲) سے یہ معلوم ہو گا کہ اس جملہ میں ب لینا چاہئے یا ۱۸۰° + ب۔
عمل حساب میں اختصار پیدا ہو گا اگر ہم یہ فرض کریں کہ

مس طہ = مس ا جم ج ، مس فہ = مس ج جم ا

اس لیے

ب = طہ + فہ

قطبی مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ب} = \frac{\text{مس ا جم ج + مس ج جم ا}}{\text{۱ − مس ا جم ج مس ج جم ا}}$$

جس سے ب معلوم ہوتا ہے کیونکہ ب اور ب + ۱۸۰° کے درمیان کا ابہام (۵) سے رفع ہو جاتا ہے۔ نیز اگر ہم رکھیں

مسَ طہَ = مس ا جم ج ، مسَ فہَ = مس ج جم ا

تو

ب = ۱۸۰° − طہَ − فہَ

اگر کروی مثلث کے تین ضلع دئے گئے ہوں تو اس کا حل حسب تفصیل ذیل معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ۲ س = ا + ب + ج تو

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{جب (س − ب) جب (س − ج)}}{\text{جب س جب (س − ا)}}} \qquad (۷)$$

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح متشابہ ضابطوں سے ب اور ج معلوم ہوتے ہیں۔

اگر تین زاوئے ا، ب، ج دئے جائیں تو رکھو

۲ س = ا + ب + ج

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{-\text{جم س جم (س − ا)}}{\text{جم (س − ب) جم (س − ج)}}}$$

(۸) . . . .

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح ب اور ج۔

(۵) اگر مثلث قائم الزاویہ ہو تو اس اہم صورت میں ہم ج کو ۹۰° کے مساوی رکھتے ہیں اور (۱)، (۲) (۳) کے مانند ضابطوں سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب ج جم ا = جم ا جب ب .... (۹)

جم ج = جم ا جم ب .... (۱۰)

جب ج جب ا = جب ا .... (۱۱)

جم ا = مس ب تم ج .... (۱۲)

مس ا = مس ا قم ب .... (۱۳)

جم ا = جم ا قم ب .... (۱۴)

قط ج = مس ا مس ب .... (۱۵)

یہ ضابطے نیپیر کے قاعدوں کی مدد سے آسانی کے ساتھ لکھ لیے جا سکتے ہیں۔ اس میں مقداروں ا، ب، (۹۰°-ا)، (۹۰°-ج)، (۹۰°-ب) کو جو اکثر "دائری اجزاء" کہلاتے ہیں ایک دائرہ میں حسب شکل (۳) لکھا جاتا ہے۔ کسی ایک دائری جزو کو "درمیانی" سمجھو تو اس کے طرفین کے اجزاء "متصلہ" کہلاتے ہیں اور باقی دو "متقابلہ"۔ چنیز نیپیر کے قاعدوں سے جو حسب ذیل ہیں (۱۰) تا (۱۵) ضابطوں کو لکھ لیا جاتا ہے:-

شکل (۳)

درمیانی کی جیب = متصلوں کے مماسوں کا حاصل ضرب،

درمیانی کی جیب = متقابلوں کی جیوب التمام کا حاصل ضرب

اس طرح دس ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں کیونکہ ان پانچ دائری اجزاء میں سے کسی ایک کو درمیانی جزو کے طور پر لے سکتے ہیں۔

یہ آسانی سے بتلایا جا سکتا ہے کہ جب کبھی کسی کروی مثلث کے دو ضلع اور ایک زاویہ، یا دو زاوے اور ایک ضلع دئے جائیں تو اس مثلث کو نپیر کے قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ اس کے ایک راس سے مقابل کے ضلع پر عمود ڈالکر اسے دو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کردیا جائے (دیکھو مثال ۲ صفحہ ۱۱)۔

ربعی مثلث (ج = ۹۰°) کے ضابطے بھی اسی شکل (۳) سے لکھ لئے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ محیط کے بیرونی جانب جو دائری اجزاء لکھے گئے ہیں ان پر نپیر کے قاعدوں کا استعمال کرنے سے ربعی مثلث کے دس ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً ا اور ۹۰ - ب کو درمیانی اجزاء لینے سے علی الترتیب ضابطے

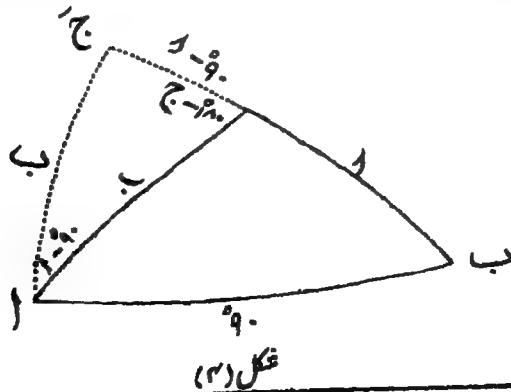
جب ا = جب ا جب ج

اور

جم ب = - مس ا م ج

حاصل ہوتے ہیں۔

(۶) قائم الزاویہ مثلث اور ربعی مثلث کے درمیان جو رشتہ یہاں مضمر ہے اسے شکل (۴) میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ا ب = ۹۰° اور ب ج کو جَ تک اتنا خارج کیا جائے کہ ب جَ = ۹۰° تو زاویہ جَ = ۹۰°، اب قائم الزاویہ مثلث ا جَ ج پر نپیر کے قاعدوں کا استعمال کرنے سے ربعی مثلث ا ب ج کے ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

شکل (۴)

لوکارتم ۔ مروجہ ترقیم جو مثلثی تفاعلوں کے لوکارتم لکھنے میں استعمال کی جاتی ہے حسب ذیل مثال سے واضح ہوگی ۔

۲۵° کی طبعی جیب التمام ۰٫۹۰۶۳۰۷۸ ہے اور

لوک جم ۲۵° = لوک ۹٫۰۶۳۰۷۸ - لوک ۱۰ = -۰٫۰۴۲۷۲۴۴

منفی لوکارتموں کے استعمال کی تکلیف سے بچنے کے لئے اسے بعض اوقات آ٫۹۵۷۲۷۶ لکھا جاتا ہے جو

-۱ + ۰٫۹۵۷۲۷۶

کا قائم مقام ہے ۔

ہم بالعموم جدولوں کے زیادہ مروج طریقہ کو اختیار کریں گے اور ہر مثلثی تفاعل کے لوکارتم میں ۱۰ کا اضافہ کرینگے ۔ اِس تبدیلی کے بعد لفظ لوک کی بجائے صرف ل[1] استعمال کیا جائے گا ۔ مثلاً پچھلی مثال میں ل کو ۹٫۹۵۷۲۷۶ لکھا جا سکتا تھا ۔ زیادہ عام صورت میں

ل جم ط = لوک جم ط + ۱۰

اگر اِس امر کا ظاہر کرنا ضروری ہو کہ وہ مثلثی تفاعل جس کا لوکارتم لیا گیا ہے ایک منفی عدد ہے تو اِس لوکارتم کے بعد ہم بالعموم (ن) لکھیں گے۔ مثلاً اگر کسی جملہ میں جم ۱۵۵° جزو ضربی کے طور پر واقع ہو تو ہم اس کا جدولی لوکارتم ۹٫۹۵۷۲۷۶ (ن) لکھیں گے جہاں ل جم ۲۵° = ۹٫۹۵۷۲۷۶

اکثر ایسا ہوتا ہے کہ کسی عمل حساب کے پہلے حصہ میں ط متعین ہوجانے کے بعد اِس کے بعض مثلثی تفاعلوں کو اس عمل حساب کے دوسرے حصہ میں استعمال کرنا پڑتا ہے ۔ اِس دوسرے حصہ عمل میں یہ تصفیہ کرنا پڑتا ہے کہ آیا ہم وہ ضابطہ استعمال کریں جو ل جب ط پر منحصر ہے یا وہ ضابطہ جو ل جم ط پر منحصر ہے ۔ ہم جو ضابطہ چاہیں استعمال کر سکتے ہیں لیکن اگر ط تقریباً صفر ہو یا تقریباً ۹۰° تو اِن میں سے ایک ضابطہ غیر یقینی ہو جائے گا

؎۱ ل کو جدولی لوکارتم کہتے ہیں ۔

اس لیے دوسرا ضابطہ استعمال کرنا چاہیئے۔ پس اُن اصولوں پر غور کرنا ضروری ہے جنکی بنا پر یہ تصفیہ کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ ایسے کوئی عام اُصول مقرر کیے جا سکیں۔
ہم مان لیتے ہیں کہ عمل حساب میں کافی احتیاط کی گئی ہے اور جس حد تک جدولوں کی صحت اس کی اجازت دیتی ہے اسی حد تک یہ عمل عددی خطاؤں سے پاک ہے لیکن چونکہ خود جدولیں بھی کامل طور پر صحیح نہیں ہوتیں اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ ط کی وہ قیمت جو حاصل ہوئی ہے صرف ایک تقریبی قیمت ہے۔ ط کی قیمت میں اس خفیف غلطی کے باوجود عمل حساب کے آخری حصہ کو ہم معتد بہ طور پر غلط ہونے سے بچا سکتے ہیں۔ اس کے لیے جو عملی قاعدہ اختیار کیا جاتا ہے وہ بہت سادہ ہے۔ یہ دو مقداریں ل جب ط اور ل جم ط بالعموم مساوی نہیں ہوتیں اور وہ ضابطہ جس میں بڑی مقدار شامل ہوتی ہے عمل حساب کے بقیہ حصہ میں استعمال کرنا چاہیئے۔ یہ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ اگر ط > (<) ۴۵° تو ط میں ایک چھوٹی خطا کی وجہ سے جم ط (جب ط) کی بہ نسبت جب ط (جم ط) پر کم اثر پڑے گا۔

مثال ۱۔ بتاؤ کہ ضابطہ

مم ا جب ب = مم ا جب ج + جم ب جم ج

سے ضلع ا کس طرح متعین ہو سکتا ہے اگر
ا = ۱۱۷° ۱۱′ ۶″، ج = ۱۵۴° ۱۳′ ۵۴″، ب = ۱۰۸° ۳۰′ ۳۰″ دیے جائیں۔

ل مم ا ۹٫۷۱۰۶۲۴۴ (ن)
ل جب ج ۹٫۶۳۸۲۲۳۰
ل مم ا جب ج ۹٫۳۴۸۸۴۷۴ (ن)
(طبعی) مم ا جب ج −۰٫۲۲۳۲۷۸۹
،، جم ج جم ب +۰٫۲۸۵۸۷۵۹
،، مم ا جب ب +۰٫۰۶۲۵۹۷۰
ل مم ا جب ب ۸٫۷۹۶۵۵۳۵
ل جب ب ۹٫۹۷۶۹۳۵۴

ل جم ج ۹٫۹۵۴۵۱۲۳ (ن)
ل جم ب ۹٫۵۰۱۶۶۵۲ (ن)
ل جم ج جم ب ۹٫۴۵۶۱۷۷۵

ل مم ا ۸،۸۱۹۶۱۸۱

∴ ا = ۸۶° ۱۳′ ۲۴″

مثال ۲۔ قائم الزاویہ مثلثوں کے طریقہ سے ا اور ب معلوم کرو جبکہ (۸)

ب = ۵۷° ۴۲′ ۳۹″ ، ج = ۱۹° ۱۸′ ۲″ ، ا = ۱۲۰° ۱۲′ ۳۶″

اب پر عمود ج پ (= ع) کھینچو۔ تب

ل جب ب　۹،۹۲۷۰۴۳۲

جب ا　۹،۹۳۶۶۰۷۷

جب ع　۹،۸۶۳۶۵۰۹　∴ ع = ۴۰° ۵۵′ ۵۸″

مس ب　۱۰،۱۹۹۳۴۵۴

جم (۱۸۰° − ا)　۹،۷۰۱۷۱۵۴

مس م　۹،۹۰۱۰۶۰۸　م = ۳۸° ۳۱′ ۴۵″

جم ع　۹،۸۳۴۳۲۹۱

جم (ج + م)　۹،۷۲۶۲۶۸۴

جم ا　۹،۵۶۰۵۹۷۵　ا = ۶۸° ۴۰′ ۴۸″

مس ع　۱۰،۰۲۹۳۲۱۸

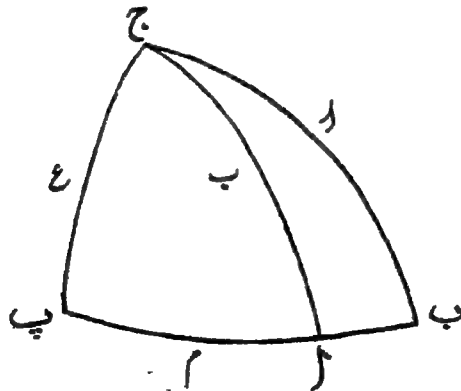
قم (ج + م)　۱۰،۰۷۲۳۸۸۷

مس ب　۱۰،۱۰۱۷۱۰۵　ب = ۵۱° ۳۸′ ۵۵″

ج

ع　ب　ا

پ　ب

م　ا

شکل (۵)

۲ ـ ڈلمبر اور نیپیر کی تمثیلات ـ

علم ہیئت کروی میں حسب ذیل مساواتیں بڑی فائدہ مند ہیں :ـ

جب $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ (ا ـ ب) = جم $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ (ا ـ ب) (۱۶)

جب $\frac{1}{2}$ ج جم $\frac{1}{2}$ (ا ـ ب) = جب $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) (۱۷)

جم $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) = جم $\frac{1}{2}$ ج جم $\frac{1}{2}$ (ا ـ ب) (۱۸)

جم $\frac{1}{2}$ ج جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) = جب $\frac{1}{2}$ ج جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) (۱۹)

یہ مساواتیں گاؤس (Gauss) کی تمثیلات کے نام سے بھی مشہور ہیں مگر ان کا انکشاف فی الحقیقت ڈلمبر نے کیا تھا[له]

ڈلمبر کی تمثیلات چونکہ لوکارثمی عمل حساب میں ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) اور (۴)، (۵)، (۶) کی بہ نسبت زیادہ سہولت و آسانی پیدا کرتی ہیں اسلیے کروی مثلثوں کے حل کرنے میں جبکہ ا، ب اور ج یا ا، ب اور ج دیے گئے ہوں انہیں ترجیح دیجاتی ہے ـ

ان ضابطوں کا یاد رکھنا اکثر تکلیف دہ ہے جب تک کہ رامبو (Rambaut)[ٹه] کے قاعدہ سے مدد نہ لیجائے ـ

ہم مقداروں کی یہ دو صفیں

$\frac{1}{2}$ (ا + ب)، $\frac{1}{2}$ (ا ـ ب)، $\frac{1}{2}$ جَ ؛

$\frac{1}{2}$ (ا + ب)، $\frac{1}{2}$ (ا ـ ب)، $\frac{1}{2}$ ج ،

له اس بیان اور ان ضابطوں کے لیے دیکھو علم مثلث کروی مصنفہ ٹوڈ ہنٹر صفحہ ۳۶ سنہ ۱۹۰۳ء

ٹه دیکھو ڈاکٹر اے۔ اے رامبو "Astronomische Nachrichten, No. 4135.

لکھتے ہیں جہاں جَ = ۱۸۰° - ج - تب ر امبو کا قاعدہ حسب ذیل ہے:- (۹)
ایک صف میں کا مجموعہ (فرق) ہمیشہ دوسری صف کی جیب التمام

(جیب) کے ساتھ وابستہ ہوتا ہے۔
چنانچہ ڈلمبر کی وہ تمثیل جس میں جب ½ (ا - ب) شامل ہے حاصل کرنے کے لیے دا امبو کے قاعدے سے مستنبط ہوتا ہے کہ
(۱) ½ ج جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ ا اور ب ایک فرق کے طور پر داخل ہوتے ہیں،
(۲) ا اور ب، فرق کے طور پر داخل ہونے چاہئیں کیونکہ ½ (ا - ب) جیب کے ساتھ داخل ہوتا ہے،
(۳) ½ (ا - ب) جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ ا اور ب فرق کے طور پر داخل ہوتے ہیں،
(۴) ½ جَ جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ ا اور ب فرق کے طور پر شامل ہوتے ہیں۔
پس یہ تمثیل لکھی جا سکتی ہے

جب ½ ج جب ½ (ا - ب) = جب ½ جَ جب ½ (ا - ب)

= جم ½ ج جب ½ (ا - ب)
ڈلمبر کی تمثیلات کے استعمال کی وضاحت کے لیے ہم وہ کروی مثلث لے سکتے ہیں جس میں

ا = ۶۲° ۴۸′ ۵۴″ ، ا = ۹۳° ۴۶′ ۳۶″
ب = ۵۷ ۴۲ ۳۹ ، ب = ۷۱ ۲۹ ۳۰
ج = ۲۵ ۳۶ ۶ ، ج = ۲۹ ۱۱ ۱۳

ہم فرض کریں گے کہ ا، ب، ج دئے گئے ہیں اور ا، ب اور ج مطلوب ہیں۔

نیچے لکھی ہوئی عددی قیمتیں متناظر مثلثی تفاعلوں کے جدولی لوگارتم ہیں:

½ ج = ۱۴° ۳۵′ ۳۶٫۵″

½ (ا + ب) = ۶۰° ۱۵′ ۴۶٫۵″ ، ½ (ا − ب) = ۲° ۳۳′ ۷٫۵″

جب ½ (ا − ب) ۸٫۶۴۸۶۲۸۶

جم ½ ج ۹٫۹۸۵۷۵۷۸

۸٫۶۳۴۳۸۶۴ = جب ½ ج جب ½ (ا − ب)

جب ½ (ا + ب) ۹٫۹۳۸۶۷۵۲

جب ½ ج ۹٫۴۰۱۳۳۰۱

۹٫۳۴۰۰۰۵۳ = جب ½ ج جم ½ (ا − ب)

جم ½ (ا − ب) ۹٫۹۹۹۵۶۹۰

جم ½ ج ۹٫۹۸۵۷۵۷۸

۹٫۹۸۵۳۲۶۸ = جم ½ ج جب ½ (ا + ب)

جم ½ (ا + ب) ۹٫۶۹۵۴۹۹۹ (۱۰)

جب ½ ج ۹٫۴۰۱۳۳۰۱

۹٫۰۹۶۸۳۰۰ = جم ½ ج جم ½ (ا + ب)

جم ½ ج جب ½ (ا + ب)	۹٫۹۸۵۳۲۶۸	½ (ا + ب) ۸۲° ۳۸′ ۳″
جم ½ ج جم ½ (ا + ب)	۹٫۰۹۶۸۳۰۰	½ (ا − ب) ۱۱° ۸′ ۳۳″
مس ½ (ا + ب)	۰٫۸۸۸۴۹۶۸	ا = ۹۳° ۴۶′ ۳۶″
جب ½ ج جب ½ (ا − ب)	۸٫۶۳۴۳۸۶۴	½ (ا + ب) ۸۲° ۳۸′ ۳″
جب ½ ج جم ½ (ا − ب)	۹٫۳۴۰۰۰۵۳	½ (ا − ب) ۱۱° ۸′ ۳۳″
مس ½ (ا − ب)	۹٫۲۹۴۳۸۱۱	ب = ۷۱° ۲۹′ ۳۰″
جب ½ ج جم ½ (ا − ب) [۱]	۹٫۳۴۰۰۰۵۳	

[۱] جب ½ ج جب ½ (ا − ب) کی بجائے ہم اس کو ترجیح دیتے ہیں کیونکہ جم ½ (ا − ب) > جب ½ (ا − ب)۔ دیکھو صفحہ ۱۰۔

جم $\frac{1}{2}$ (ا-ب)	۹٫۶۹۱۷۳۵۲
جب $\frac{1}{2}$ ج	۹٫۳۴۸۲۷۰۱
جم[1] $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ (ا+ب)	۹٫۹۸۵۳۲۶۸
جب $\frac{1}{2}$ (ا+ب)	۹٫۹۹۶۴۰۱۲
جم $\frac{1}{2}$ ج	۹٫۹۸۸۹۲۵۶
جب $\frac{1}{2}$ ج	۹٫۳۴۸۲۷۰۱
جم $\frac{1}{2}$ ج	۹٫۹۸۸۹۲۵۶
مس $\frac{1}{2}$ ج	۹٫۳۵۹۳۴۴۵ $\frac{1}{2}$ ج ۱۲° ۵۳′ ۳″

اِس لیے ا = ۹۳° ۴۶′ ۳۶″ ، ب = ۱۷° ۲۹′ ۳۰″ ، ج = ۲۵° ۴۶′ ۶″

ڈلمبر کی تمثیلوں سے حسب ذیل چار ضابطے آسانی کے ساتھ حاصل ہوتے ہیں، یہ ضابطے نیپیر کے تمثیلوں کے نام سے مشہور ہیں۔

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\text{ج} \qquad (۲۰)$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\text{ج} \qquad (۲۱)$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}\ \text{مم}\ \tfrac{1}{2}\text{ج} \qquad (۲۲)$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}\ \text{مم}\ \tfrac{1}{2}\text{ج} \qquad (۲۳)$$

نیپیر کی تمثیلوں کے ذریعہ مثلث کا حل معلوم کرنے کے لیے حسبِ ذیل

---

[1] جم $\frac{1}{2}$ ج جم $\frac{1}{2}$ (ا+ب) کی بجائے ہم اس کو ترجیح دیتے ہیں کیونکہ جب $\frac{1}{2}$ (ا+ب) > جم $\frac{1}{2}$ (ا+ب)

مثال دی جاتی ہے:-

ا = ۲۳° ۲۷′ ، ب = ۷° ۱۵′ ، ج = ۳۷° ۲۹′

ہم چار ہندسی لوکارتم استعمال کریں گے جو اکثر مقاصد کے لیے کافی صحیح ہیں۔

ل جم $\frac{1}{2}$(ا-ب) = ۹،۹۹۵۶ ، ل جب $\frac{1}{2}$(ا-ب) = ۹،۱۴۸۹

ل قط $\frac{1}{2}$(ا+ب) = ۰،۰۱۵۸ ل تم $\frac{1}{2}$(ا+ب) = ۰،۵۷۷۲

ل مس $\frac{1}{2}$ ج = ۹،۸۸۰۹ ل مس $\frac{1}{2}$ ج = ۹،۸۸۰۹

ل مس $\frac{1}{2}$(ا+ب) = ۹،۸۹۲۳ ل مس $\frac{1}{2}$(ا-ب) = ۹،۶۰۷۰

$\frac{1}{2}$(ا+ب) = ۳۷° ۸′ $\frac{1}{2}$(ا-ب) = ۲۲° ۲′

ا = ۶۰° ۱۰′ ، ب = ۱۵° ۵۶′

اب چونکہ $\frac{1}{2}$(ا-ب) اور $\frac{1}{2}$(ا+ب) دونوں > ۴۵° اسلیے ج معلوم کرنے کے لیے ضابطہ (۲۲) مناسب ہے جسے لکھا جاسکتا ہے

مس $\frac{1}{2}$ ج = جم $\frac{1}{2}$(ا-ب) قط $\frac{1}{2}$(ا+ب) مم $\frac{1}{2}$(ا+ب)

پس ل جم $\frac{1}{2}$ (ا-ب) = ۹،۹۶۷۱

ل قط $\frac{1}{2}$ (ا+ب) = ۰،۱۰۳۳

ل مم $\frac{1}{2}$ (ا+ب) = ۰،۵۶۱۴

ل مس $\frac{1}{2}$ ج = ۰،۶۳۱۸ ، ج = ۱۵۳° ۴۳′

۳ — صحت جو لوکارتمی عمل حساب میں حاصل ہوسکتی ہے۔

جب کسی مثلثی تفاعل کا لوکارتم دیا جاتا ہے تو بالعموم کافی صحت کے ساتھ زاویے کا معلوم کرنا ممکن ہے۔ لیکن اکثر ایسی صورتیں پیش آتی ہیں

جن میں یہ بیان کُلّاً درست نہیں ہوتا۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم اپنے لوکارتموں میں صرف پانچ ہندسے رکھتے ہیں اور چاہتے ہیں کہ ط رشتہ ذیل سے معلوم ہو

ل جب ط = ۹٫۹۹۹۹۸

اِس رشتہ سے اِس سے زیادہ معلوم نہیں ہوتا کہ ط، °۸۹ ۲۳َ ۷ً اور °۸۹ ۳۱َ ۲۵ً کے درمیان کہیں واقع ہونا چاہیئے۔ اگر ہم لوکارتموں میں اعشاریہ کے سات مقامات بھی استعمال کریں تو بھی ابہام ہمیشہ رفع نہیں ہو سکتا۔ مثلاً ہم دیکھتے ہیں کہ °۸۹ ۵۶َ ۱۹ً سے °۸۹ ۵۷َ ۸ً تک ہر زاویہ کے ل جب کی وہی جدولی قیمت ۹٫۹۹۹۹۹۹۸ ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ °۹۰ کے قریب زاویے، ل جب سے اچھی طرح متعین نہیں ہوتے۔ اسی طرح صفر کے قریب زاویے، ل جم سے اچھی طرح متعین نہیں ہوتے۔ لیکن سب زاویے، ل مس سے صحت کے ساتھ معلوم کئے جا سکتے ہیں جیسا کہ اب ہم ثابت کریں گے۔

اگر ط میں ایک چھوٹا اضافہ ہً یا ہ جب اً (دائری ناپ میں) کیا جائے اور ل مس ط میں اعشاریہ کے ۷ ویں مقام میں لا اکائیوں کا اضافہ ہو تو ہ اور لا کے درمیان مساوات معلوم کرنا ہوگا۔

عام لوکارتموں کو نیپیری لوکارتموں میں مقیاس ۰٫۴۳۴۳ کے ذریعہ تبدیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے (۱۲)

لا \ ۱۰۰۰۰۰۰ = ۰٫۴۳۴۳ لوکو مس (ط + ہ جب اً) − ۰٫۴۳۴۳ لوکو مس ط

= ۰٫۴۳۴۳ لوکو (۱ + ہ جب اً مم ط)

− ۰٫۴۳۴۳ لوکو (۱ − ہ جب اً مس ط)

اِس لئے اِن لوکارتموں کو پھیلانے سے

لا = ۰٫۰۰۰۰۴۳۴۳ جب اً (مس ط + مم ط) ہ، تقریباً

اسے لکھا جا سکتا ہے

ہ = لا جب ۲ طہ \ ۱،۲۱ ۴

ہ کی بڑی سے بڑی قیمت لا \ ۱، ۴۲ ہے اس لئے طہ کی محسوبہ قیمت جبکہ ل مس طہ دیا گیا ہو آ" غلط نہیں ہو سکتی الّا آنکہ ل مس طہ خود ۴۲ ۰۰۰۰، ۰ کی حد تک غلط ہو۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ جب پانچ ہندسی لوکارتم استعمال کئے جائیں اور عمل حساب آخری اعشاریہ میں دو اکائیوں کے اندر تک ٹھیک ہو تو کسی زاویے کی خطا جو اس کے مماس سے متعین کیا گیا ہو ۵ ثانیوں سے بڑھ نہیں سکتی۔

مثال ۲۔ کسی زاویے کے ل جب کے آخری اعشاریہ میں ایک اکائی کے تغیر سے اس زاویہ کی قیمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس کی تحقیق کرو اور بتاؤ کہ تمام صورتوں میں زیادہ صحت اس میں ہے کہ اس زاویہ کو اس کی جیب کی بجائے اس کے مماس سے متعین کیا جائے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر طہ ایک چھوٹا زاویہ ہو تو اس کی قیمت ثانیوں میں اس جملہ

قم آ جب طہ (قط طہ)$^{\frac{1}{3}}$

سے تقریبی طور پر حاصل ہوتی ہے اور بتاؤ کہ اگر طہ ۰۹° کے اتنا بڑا بھی ہو تو یہ جملہ آ" کی حد تک غلط نہیں ہوگا۔

مثال ۴۔ اگر طہ ایک چھوٹا زاویہ ہو جسے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے تو ثابت کرو کہ

ل جب طہ = لوک طہ + س

جہاں س = $\frac{1}{3}$ (۲۰ + ل جم طہ) ۔ ۵،۳۱۴۴۲۵۱

اور مثلاً ثابت کرو کہ اگر طہ = ۲۰،۷۴۸۰" تو

ل جب طہ = ۸،۰۰۲۴۱۸۲

مقدار س برُھن (Bruhn) کی جدولوں میں دیجاتی ہے۔

مثال ۵ ۔ طہ کی قیمت معلوم کرو اگر ل جب طہ = ۸،۰۱۲۳۴۵۶

اُن جدولوں سے جو بیگے (Bagay) کی جدولوں کی مانند ہوں ہر ثانیہ کیلئے مثلثی تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اِن سے معلوم ہوگا کہ مطلوبہ زاویہ ۳۵° ۳۲′ ۴۲″ سے زیادہ فرق نہیں رکھتا اور یہ فرق ایک ثانیہ کی چھوٹی کسر سے زیادہ نہیں ہے۔ اِس کسر کو معلوم کرنے کے لیے ہم س = $\frac{1}{3}$ (۲۰ + ل جم طہ) - ۵۱۳۱۴۴۲۵۱ کا حساب لگاتے ہیں جو ل جم طہ میں طہ کی بجائے ۳۵° ۳۲′ ۴۲″ درج کرنے سے ۲۷ ۵۶۸۵۶ ۱۴ ہو جاتا ہے۔

تب مساوات لوک طہ = ل جب طہ - س سے

طہ = ۱۲ ۲۲ ۲۱″

۴ ۔ کروی مثلث میں تفرقی ضابطے ۔

کوئی چھ زاویے ا، ب، ج، ا، ب، ج بالعموم کروی مثلث کے ضلع اور زاویے نہیں ہوں گے۔ اگر ایسا ہو تو اِن زاویوں کو تین شرطیں پوری کرنی ہوں گی۔ یہ اِس امر سے ظاہر ہے کہ اگر فی الواقعی یہ چھ مقداریں ایک مثلث کے اجزا ہیں تو اِن میں سے کوئی تین دئے جانے پر دوسری تین مقداریں متعین ہونی چاہئیں۔

مان لو کہ یہ چھ مقداریں فی الواقعی ایک کروی مثلث کے اجزا ہیں اور فرض کرو کہ اِن سب میں علی الترتیب چھوٹے اضافے مف ا، مف ب، مف ج، مف ا، مف ب، مف ج کئے گئے ہیں۔ اِن مقداروں کو اِس طرح متغیر کرنے کے بعد وہ بالعموم کسی کروی مثلث کے اجزا نہ رہینگے۔ اگر وہ کسی کروی مثلث کے اجزا ہوں تو انہیں تین شرطیں پوری کرنی چاہئیں جنہیں ہم اب معلوم کریں گے۔

اساسی ضابطہ

جم ا = جم ب جم ج + جب ج جب ب جم ا

کو تفرق کرو تو

-جب ا مف ا = -جب ب جم ج مف ب - جم ب جب ج مف ج

+جم ب جب ج جم ا مف ب + جب ب جم ج جم ا مف ج
- جب ب جب ج جب ا مف ا

لیکن دفعہ (۱) کے ضابطہ (۲) سے

جب ا جم ب = جم ب جب ج - جب ب جم ج جم ا
جب ا جم ج = جب ب جم ج - جم ب جب ج جم ا

اس لئے درج کرنے اور متشابہ ضابطوں کو ساتھ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

مف ا = جم ج مف ب + جم ب مف ج + ھ جب ب جب ج مف ا
مف ب = جم ا مف ج + جم ج مف ا + ھ جب ج جب ا مف ب ..(ا)
مف ج = جم ب مف ا + جم ا مف ب + ھ جب ا جب ب مف ج

جہاں ھ = جب ا / جب ا = جب ب / جب ب = جب ج / جب ج

اسی طرح عمل کرو تو ضابطوں (۴) اور (۵) سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہونگی

مف ا = - جم ج مف ب - جم ب مف ج + ھ' جب ب جب ج مف ا
مف ب = - جم ا مف ج - جم ج مف ا + ھ' جب ج جب ا مف ب (۲)
مف ج = - جم ب مف ا - جم ا مف ب + ھ' جب ا جب ب مف ج

پس ہم نے یہ ثابت کردیا کہ اگر ا، ب، ج، ا، ب، ج ایک کروی مثلث کے اجزاء ہوں تو مساواتوں (ا) یا (۲) میں سے کسی ایک جٹ سے وہ تین ضروری اور کافی شرطیں بیان ہوتی ہیں کہ

ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج، ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج

بھی ایک کروی مثلث کے اجزاء ہوں۔

(۱۴) اگر ان تفرقوں میں سے تین صفر ہوں تو بقیہ تین تفرقے بھی بالعموم صفر ہوں گے۔ یہ امر مساواتوں سے ظاہر ہے اور نیز اس امر سے بھی کہ اگر کسی کروی مثلث کے تین اجزاء نہ بدلیں تو دوسرے تین اجزاء بھی بالعموم نہیں بدلینگے۔ اس بیان کی ایک مستثنیٰ صورت ذیل کی مثال سے ملتی ہے۔ فرض کرو کہ ج = ۹۰° اور مف ب = ۰، مف ج = ۰، مف ب = ۰۔ اس صورت میں

(ا) کی دوسری مساوات سے یہ لازم نہیں آئے گا کہ مف ا = ۰
مثال ۱ ۔ کن شرطوں کے تحت کروی مثلث میں ایک ایسی چھوٹی تبدیلی کی جاسکتی ہے کہ مف ا = ۰ ، مف ب = ۰ ، مف ا = ۰ ، مف ب = ۰ لیکن مف ج اور مف ج دونوں صفر نہ ہوں ۔
(۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا = ۹۰° ، ب = ۹۰° ، اس لیے ا = ۹۰° ، ب = ۹۰°
مثال ۲ ۔ اگر ایک کروی مثلث میں ایسی چھوٹی تبدیلی کی جائے جس سے اس کے تین زاویوں کا مجموعہ نہ بدلے تو ثابت کرو کہ ضلعوں کے طولوں میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں وہ شرط

مف ا جب (س - ا) + مف ب جب (س - ب)
+ مف ج جب (س - ج) = ۰

کو پورا کرتی ہیں جہاں س = ½ (ا + ب + ج)

۵ ۔ بینی ادراج کا فن ۔

علم ہیئت کے حسابات میں نہ صرف لوکارتمی جدولوں کا استعمال کیا جاتا ہے بلکہ بہت سی اور جدولوں کا بھی مثلاً وہ جدولیں جو ایفیمرس[۱] میں پائی جاتی ہیں ۔ بینی ادراج کا فن ان عام اصولوں سے متعلق ہوتا ہے جن پر ایسی جدولوں کا استعمال کیا جاتا ہے ۔
فرض کرو کہ ما ایک مقدار ہے جس کی قیمت ، دوسری مقدار لا کی قیمت پر منحصر ہے ۔ تب ہم کہتے ہیں کہ ما ، لا کا ایک تفاعل ہے ان کے رشتہ کو اس طرح

ما = ف (لا) (آ)

سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں ف (لا) سے لا کا کوئی تفاعل تعبیر ہوتا ہے ۔ اس عام شکل میں

ما = لوک لا یا ما = ل مس لا

[۱] Ephemeris

جیسی مخصوص صورتیں شامل ہیں۔

فرض کرو کہ لا کو ایک قیمت صفر دی گئی ہے تو اس کے جواب میں ما کی قیمت ما$_{۰}$ رشتہ ما$_{۰}$ = ف (۰) سے حاصل ہوگی۔ فرض کرو کہ اس کے بعد (۱) میں لا کی بجائے متواتر ہ، ۲ہ، ۳ہ .... درج کئے گئے ہیں اور ان کے جواب میں ما کی قیمتیں علی الترتیب ما$_{۱}$، ما$_{۲}$، ما$_{۳}$ ..... حاصل ہوتی ہیں۔ تب کسی جدول کا لازمی خاصہ یہ ہے کہ اس کے ایک ستون میں ہم لا کی قیمتیں یعنے ۰، ہ، ۲ہ، .... رکھتے ہیں اور دوسرے ستون میں ما کی متناظر قیمتیں یعنے ما$_{۰}$، ما$_{۱}$، ما$_{۲}$، ..... ۔

(۱۵) لا کی قیمت جسے اکثر دلیل کہتے ہیں مساوی وقفوں ہ سے برابر آگے بڑھتی ہے اور ما کی ہر متناظر قیمت کو جسے اکثر تفاعل کہتے ہیں اتنی زیادہ صحت کے ساتھ محسوب کیا جاتا ہے جتنی اس مقصد کے لیے ضروری ہے جس کے لیے جدول تیار کی جارہی ہے۔

ما = ف (لا) کی جدول

لا	ما
۰	ما$_{۰}$
ہ	ما$_{۱}$
۲ہ	ما$_{۲}$
۳ہ	ما$_{۳}$
......	....

ایسی کسی جدول کی غایت یہ ہوتی ہے کہ اس سے دلیل کی دی ہوئی قیمت کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہو یا تفاعل کی دی ہوئی قیمت کے جواب میں دلیل کی قیمت معلوم ہو۔

اکثر ایسا ہوتا ہے کہ تفاعل کی عددی قیمت کو ایسی دلیل کے جواب میں معلوم کرنا ہوتا ہے جبکہ یہ دلیل صریحاً جدول میں موجود نہ ہو بلکہ وہ دلیل کی دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان واقع ہو۔ اس کا عکس بھی اکثر درپیش ہوتا ہے یعنی تفاعل کی دی ہوئی قیمت کے جواب میں دلیل کی قیمت معلوم کرنا پڑتا ہے جبکہ تفاعل کی دی ہوئی قیمت دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان واقع ہو۔ ممکن ہے پہلے یہ خیال آئے کہ ان میں سے کسی صورت میں ہم اصلی مساوات (آ) کی طرف رجوع ہوں اور اس سے مطلوبہ قیمتیں معلوم کریں۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے تفاعلی رشتہ کی خاصیت جدول میں اسقدر سرایت کر جاتی ہے کہ جب، لا اور ما میں سے کوئی ایک دیا جائے تو دوسرا، بینی اوراج کے فن سے جسکی تشریح اب کی جائے گی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

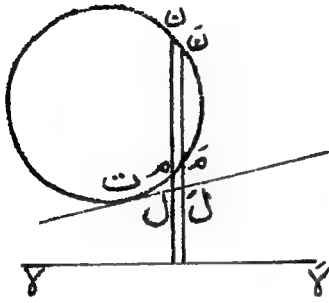
اس فن کی نوعیت سب سے زیادہ صاف طور پر علم ہندسہ کے ذریعہ واضح کی جا سکتی ہے۔ ہم منحنی ما = ف (لا) کو معمولی طریقہ سے مرتسم کر سکتے ہیں۔ مبداء و سے محور لا پر نقطوں ا$_1$، ا$_2$، ا$_3$... کا نشان لگاؤ جو و سے علی الترتیب ہ$_1$، ہ$_2$، ہ$_3$،.... فاصلوں پر ہوں ضابطہ ما = ف (لا) سے ما کی متناظر قیمتیں ما$_1$، ما$_2$، ما$_3$.... محسوب کرو۔ پھر ا$_1$، ا$_2$... (شکل ۶) پر معین ا$_1$ب$_1$، ا$_2$ب$_2$.... قائم کرو جو علی الترتیب قیمتوں ما$_1$، ما$_2$.... کے مساوی ہوں۔ نقطے ب$_1$، ب$_2$، ب$_3$ وغیرہ بالعموم ایسے واقع ہوں گے کہ ان میں سے گذرتا ہوا ایک منحنی صاف طور پر کھینچا جا سکے گا۔ اگر نقطے ا$_1$، ا$_2$.... کافی طور پر باہم نزدیک ہوں یعنے اگر ہ کافی

شکل (۶)

چھوٹا ہو تو منحنی کی شکل اسقدر صاف طور پر واضح ہو گی کہ اسی قسم کے ایسا
کا بہت کم امکان ہو گا کہ منحنی ما = ف (لا) جو ب، ب۱، ب۲
میں سے گذرتا ہے ان حدود کے اندر اس منحنی سے زیادہ فرق نہیں
رکھے گا جو ابھی ان نقطوں میں سے کھینچا گیا ہے۔ بلا شبہ حقیقی منحنی تفاعل
ما = ف (لا) کی نوعیت پر منحصر ہو گا۔ لیکن چونکہ ہیئتی ادراج کے فن میں
ہم کو منحنی کے صرف ایک چھوٹے حصے سے واسطہ رہے گا اس لیے
زیر بحث منحنی کی مخصوص خاصیتوں پر غور کرنا غیر ضروری ہے۔
پھر ... تخمینہ کے لیے بعینہٖ منحنی ما = ف (لا) کا استعمال ضروری
نہیں ہے بلکہ کسی سہل منحنی کا۔ ہم پہلے سہل دائرہ لیتے ہیں جو ہیئتی ادراج
کی حد تک کافی تو ... صحیح ہو۔ بالعموم ایسا دائرہ کھینچنا ممکن ہوتا ہے جس کی
قوس دیے ہوئے منحنی کی قوس کے ساتھ کسی دیے ہوئے نقطہ پر اسقدر عین منطبق
ہو کہ چھوٹے فاصلے کے لیے دائرہ کا منحنی سے اختلاف ناقابل قدر ہو۔ اس لیے
ہم اس چھوٹے حصے کو جس سے ہمیں واسطہ ہے دائری قوس کے طور پر تصور
کر سکتے ہیں خواہ اصل منحنی کچھ بھی ہو۔ چنانچہ ہم ب، ب۱، ب۲ میں سے
گذرتا ہوا ایک دائرہ کھینچتے ہیں اور مان لیتے ہیں کہ ب۱ اور ب۲ کے درمیان
کسی نقطہ ب کے لیے دائرہ کا معین لا کی قیمت کے جواب میں ما کی قیمت
ہے۔ مثلاً اگر اب معین ہو تو اب تفاعل کی قیمت ہے جبکہ
ن = و ا۔ ہم اب کے لیے ایک جملہ معلوم کرنے میں اس دائرہ کا استعمال
کریں گے، اس جملہ میں صرف نقطہ ب کا فصلہ اور نقاط ب، ب۱، ب۲
کے محدد شریک ہوں گے۔ بلا شک یہ ما کی وہ قیمت نہیں ہو گی جو ضابطہ
ما = ف (لا) سے حاصل ہوتی ہے لیکن اس سے زیادہ فرق بھی نہیں رکھے گی۔

فرض کرو کہ ت م مَ نَ ن ایک دائرہ ہے اور ت پر
اس کا مماس ت ل لَ ہے۔ فرض کرو کہ ل ن اور لَ نَ دو خط
ہیں جو دونوں محور لا پر عمود ہیں۔ تب دائرہ کی خاصیت کی رو سے

(شکل ۷)

(۱۷)

$\text{ل م} \times \text{ل ن} = \text{ل ت}^2$،

$\text{لَ مَ} \times \text{لَ نَ} = \text{لَ ت}^2$،

اس لیے

$$\frac{\text{ل م}}{\text{لَ مَ}} = \frac{\text{ل ت}^2}{\text{لَ ت}^2} \times \frac{\text{لَ نَ}}{\text{ل ن}}$$

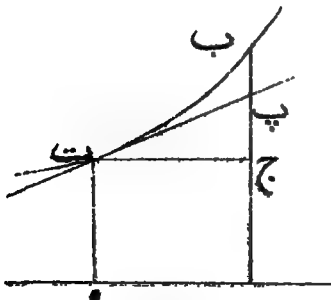
اب فرض کرو کہ ل ن اور لَ نَ، ت کے انتہائی قریب آتے ہیں تب $\frac{\text{لَ نَ}}{\text{ل ن}} = ۱$، اور

$$\text{ل م} : \text{لَ مَ} :: \text{ل ت}^2 : \text{لَ ت}^2$$

شکل (۷)

اب چونکہ نقطہ تماس کے قرب میں منحنی کی قوس اس کے لمثی دائرہ کی قوس سے ناقابل امتیاز ہے اس لیے ہمیں بینی ادراج کا اصول حاصل ہوتا ہے جسے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :-

اگر تماس ت ل کھینچا گیا ہو جو منحنی کو ت پر مس کرتا ہے اور ت کے متصل، ل م ایک معین ہو تو مماس اور منحنی کے درمیان معین کا مقطوعہ ل م، ت ل کے مربع کے متناسب ہوگا ۔

شکل (۸) میں و مبداء، ب کا معین ما اور ت کا معین ما ہے ۔ پس ب پ ایسے بدلتا ہے جیسے پ ت^2 اور اس لیے ایسے بدلتا ہے جیسے ج ت^2 ۔ نیز ج پ ایسے بدلتا ہے جیسے ج ت ۔ پس

شکل (۸)

اگر ب کا فصلہ لا ہو تو

ما − ما. = ل لا + م لا^۲

جہاں ل اور م ، ت کے قریب نقطوں کے لیے مستقل ہیں۔ صریحاً یہ ایک مکانی کی مساوات ہے۔

مستقلوں ل اور م کو لَ اور مَ میں بدل کر ہم مساوات بالا کو لکھ سکتے ہیں

ما = ما. + لَ لا + مَ لا (لا − ھ)

ہم لَ اور مَ کو اس امر پر غور کر کے معلوم کرتے ہیں کہ (ھ ، ما۱)، (۲ھ ، ما۲) منحنی پر کے نقطے ہوں۔ پہلے نقطہ سے حاصل ہوتا ہے

لَ = (ما۱ − ما.) / ھ

(۱۸) اور لا = ۲ھ ، ما = ما۲ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ما۲ = ما. + ۲ (ما۱ − ما.) + ۲ھ^۲ مَ

یا مَ = (ما۲ − ۲ ما۱ + ما.) / ۲ھ^۲

اور اس لیے مساوات ہو جاتی ہے

ما = ما. + (لا / ھ) (ما۱ − ما.) + [لا (لا − ھ) / ۲ھ^۲] (ما۲ − ۲ ما۱ + ما.) .... (أ)

فرض کرو کہ تفاعل ما کی تین متصل قیمتیں ما. ، ما۱ ، ما۲ ہیں جہاں ھ دلیل کی دوسری اور پہلی قیمتوں کے درمیان فرق ہے اور نیز تیسری اور دوسری قیمتوں کے درمیان۔ پس کسی دلیل کے جواب میں جو پہلی دلیل سے بقدر لا کے بڑی ہو لیکن دوسری دلیل سے چھوٹی ہو مندرجۂ بالا ضابطہ سے تفاعل کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔

اِس ضابطہ میں جو مستقل ہیں اِن کی قیمتیں بہت آسانی کے ساتھ جدول سے فرقوں کے طریقہ کے ذریعہ حاصل ہوتی ہیں :-

	فرق اول	فرق دوم
ما_0		
	$\text{ما}_1 - \text{ما}_0$	
ما_1		$\text{ما}_2 - 2\,\text{ما}_1 + \text{ما}_0$
	$\text{ما}_2 - \text{ما}_1$	
ما_2		

پہلے ستون میں ما کی تین متصل قیمتیں ہیں۔ دوسرے ستون میں ہر قیمت اور اس کی ماقبل قیمت کے درمیان کے فرق ہیں تیسرے میں دوسرے ستون کے متصلہ ارقام کے فرق درج ہیں۔ تیسرے اور اس سے اعلیٰ تر فرق بھی حسب ضرورت اسی طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

اگر ہم اختصار کے مدنظر $\text{ما}_1 - \text{ما}_0 = \text{ط}$ اور $\text{ما}_2 - 2\,\text{ما}_1 + \text{ما}_0 = \text{طَ}$ لکھیں اور لا کی جگہ ت رکھیں کیونکہ وقت (ت) ہیئتی مسائل میں بالعموم متبوع متغیر ہوتا ہے اور اگر فرق ۰ کو وقت کی اکائی بنائیں تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = \text{ما}_0 + \text{ت}\,\text{ط} + \frac{\text{ت}(\text{ت}-1)}{2}\,\text{طَ}$$

اِس آخری مساوات کو ت کے لحاظ سے تفرق کرو تو ت کے لحاظ سے ما جس شرح سے بدلتا ہے وہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} = \text{ط} - \frac{1}{2}\,\text{طَ} + \text{ت}\,\text{طَ}$$

ہے جس سے یہ ظاہر ہے کہ اضافہ کی شرح خود یکساں طور پر بڑھتی ہے۔

وقت کی دو اکائیوں میں تفاعل کی قیمت ما_0 سے ما_2 تک بڑھتی ہے (۱۹) اس لیے اِس کے اضافہ کی اوسط شرح فی اکائی وقت $\frac{1}{2}(\text{ما}_2 - \text{ما}_0)$ ہے اور چونکہ یہ شرح یکساں طور پر بڑھتی ہے اِس لیے یہ اپنی اوسط قیمت اُس وقت اختیار کرے گی جبکہ نصف وقت گذر چکا ہو ~~یعنے~~ جبکہ تفاعل کی

قیمت ما ہو۔ پس ہم حسب ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔
کسی آن ت پر تفاعل جس شرح سے فی اکائی وقت بدلتا ہے وہ، تفاعل کی اُن قیمتوں کے فرق کا نصف ہے جو تفاعل، ت کے بعد وقت کی ایک اکائی پر اور ت سے قبل وقت کی ایک اکائی پر اختیار کرتا ہے۔
بینی ادراج کے عمل کو تیز تر کرنے کے لیے ایفیمرس میں اکثر ایک اور ستون کا اضافہ کیا جاتا ہے جس سے متناظر لمحہ پر تفاعل کے تغیر کی شرح، حاصل ہوتی ہے۔ ہم اسے ایک مثال سے واضح کریں گے۔
فرض کرو کہ چاند کا جنوبی میل بتاریخ ۶ ستمبر ۱۹۰۵ء گرینوچ کی اوسط دوپہر کے ۱۵ + ت گھنٹوں بعد معلوم کرنا ہے۔
۱۵ گھنٹوں گ - ا - و (گرینوچ اوسط وقت) پر چاند کا جنوبی میل ایفیمرس سے ۱۸° ۳۸′ ۱۳٫۱″ حاصل ہوتا ہے اور ۱۰ منٹ میں تغیر ۲۳٫۵۵″ ہے، چاند جنوب کی طرف حرکت کر رہا ہے۔ اسی دن ۱۶ گھنٹوں پر جدول کی دوسری سطر سے ۱۰ منٹ میں تغیر ۲۲٫۴۱″ حاصل ہوتا ہے اور چونکہ تغیر کی شرح یکساں طور پر گھٹتی ہوئی تصور کی جا سکتی ہے اس لیے دوپہر کے بعد (۱۵ + ½ ت) گھنٹوں پر تغیر فی دس منٹ یہ ہے

۲۳٫۵۵″ - ۰٫۵۷″ ت

تغیر کی اِس اوسط شرح کو ۱۵ گھنٹوں اور ۱۵ + ت گھنٹوں کے درمیان پورے وقفہ کے لیے مان لیا جا سکتا ہے اور چونکہ ت کو گھنٹوں میں بیان کیا گیا ہے اس لیے اِس وقفہ میں کل تغیر اوسط شرح کو ۶ ت سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس چاند کا جنوبی میل بتاریخ ۶ ستمبر ۱۹۰۵ء ۱۵ + ت گھنٹوں پر حسب ذیل ہے

۱۸° ۳۸′ ۱۲٫۱″ + ۱۴۱٫۳″ ت - ۳٫۴۲″ ت²

بینی ادراج کے ضابطے مسئلہ بالا کے معکوس مسئلہ میں وہ وقت معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کئے جاتے ہیں جس پر کوئی خاص تفاعل

کوئی مقررہ قیمت اختیار کرتا ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ ۶۔ ستمبر ۱۹۰۵ء کو وقت معلوم کرنا ہے جبکہ چاند کا جنوبی میل ۱۸° ۴۰′ ہے۔ مساوات بالا سے

$$\text{۱۸° ۴۰′} = \text{۱۸° ۳۸′ ۲۲٫۱″} + \text{۱۴۱٫۳″}\,\text{ت} - \text{۳٫۴۲″}\,\text{ت}^{2}$$

یہ مساوات ت میں دو درجی ہے اور آخری رقم کو نظر انداز کرنے سے مطلوبہ اصل تقریباً ۰٫۸۶ معلوم ہوتی ہے۔ اصلی مساوات میں اس قیمت کو ت^{2} میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{۱۱۸٫۸} = \text{۱۴۱٫۳}\,\text{ت} - \text{۲٫۵۳}$$

اس لیے ت = ۰٫۸۵۹ اور مطلوبہ وقت ہے ۱۵ گ ۵۱ م ۳۰ ش (گ = گھنٹے، م = منٹ، ش = ثانیے) — مساوات درجۂ دوم کی دوسری اصل ہمارے مقصد کے لیے بے کار ہے۔ (۲۰)

مندرجۂ بالا بینی ادراج کے اساسی ضابطہ کی تعمیم آسانی سے ہو سکتی ہے۔ مان لو کہ

$$\text{ما} = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\text{ت} + \text{ا}_{2}\text{ت}(\text{ت}-1) + \text{ا}_{3}\text{ت}(\text{ت}-1)(\text{ت}-2)$$
$$+ \text{ا}_{4}\text{ت}(\text{ت}-1)(\text{ت}-2)(\text{ت}-3)$$

جہاں نامعلوم سروں ا_{0}، ا_{1}، ا_{2}، ا_{3}، ا_{4} کی قیمتیں اس طرح مقرر کرنا ہے کہ جب، ت بتدریج ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ ہو جائے تو ما علی الترتیب قیمتیں ما_{0}، ما_{1}، ما_{2}، ما_{3}، ما_{4} اختیار کرے۔

پس درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}_{0} = \text{ا}_{0}\,،$$
$$\text{ما}_{1} = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,،$$
$$\text{ما}_{2} = \text{ا}_{0} + 2\,\text{ا}_{1} + 2\,\text{ا}_{2}\,،$$
$$\text{ما}_{3} = \text{ا}_{0} + 3\,\text{ا}_{1} + 6\,\text{ا}_{2} + 6\,\text{ا}_{3}\,،$$

$$\text{ما}_{۴} = \text{ا}_{۰} + ۴\,\text{ا}_{۱} + ۱۲\,\text{ا}_{۲} + ۲۴\,\text{ا}_{۳} + ۲۴\,\text{ا}_{۴}$$

اِس لیے

$$\text{ا}_{۰} = \text{ما}_{۰} \text{ ،}$$

$$\text{ا}_{۱} = \text{ما}_{۱} + \text{ما}_{۰} \text{ ،}$$

$$\text{ا}_{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\text{ما}_{۲} - ۲\,\text{ما}_{۱} + \text{ما}_{۰}\right) \text{ ،}$$

$$\text{ا}_{۳} = \frac{۱}{۶}\left(\text{ما}_{۳} - ۳\,\text{ما}_{۲} + ۳\,\text{ما}_{۱} - \text{ما}_{۰}\right) \text{ ،}$$

$$\text{ا}_{۴} = \frac{۱}{۲۴}\left(\text{ما}_{۴} - ۴\,\text{ما}_{۳} + ۶\,\text{ما}_{۲} - ۴\,\text{ما}_{۱} + \text{ما}_{۰}\right)$$

اس طرح بینی اندراج کا عام ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}_{\text{ت}} = \text{ما}_{۰} + \text{ت}\,\text{ط}_{۱} + \frac{\text{ت}(\text{ت}-۱)}{۲\times۱}\text{ط}_{۲} + \frac{\text{ت}(\text{ت}-۱)(\text{ت}-۲)}{۳\times۲\times۱}\text{ط}_{۳}$$

$$+ \frac{\text{ت}(\text{ت}-۱)(\text{ت}-۲)(\text{ت}-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}\text{ط}_{۴} \ldots\ldots (۲)$$

جہاں $\text{ط}_{۱}$، $\text{ط}_{۲}$، $\text{ط}_{۳}$، $\text{ط}_{۴}$ متواتر فرقوں کو تعبیر کرتے ہیں ۔

بالعموم آخری رقم نظر انداز کی جا سکتی ہے کیونکہ جملہ

$$\text{ما}_{۴} - ۴\,\text{ما}_{۳} + ۶\,\text{ما}_{۲} - ۴\,\text{ما}_{۱} + \text{ما}_{۰}$$

عام طور پر بہت چھوٹا ہوگا ۔ اگر ہم اسے صفر کے مساوی رکھیں تو

$$\text{ما}_{۲} = \frac{۲}{۳}\left(\text{ما}_{۱} + \text{ما}_{۳}\right) - \frac{۱}{۶}\left(\text{ما}_{۰} + \text{ما}_{۴}\right)$$

جدولوں میں درج شدہ مقداریں بلا شبہ عام طور پر ایک حد تک غلط ہوتی ہیں، یہ غلطی اعشاریہ کے آخری مقام میں نصف ہندسہ تک ہو سکتی ہے ۔ اگر $\text{ما}_{۱}$ اور $\text{ما}_{۳}$ ہر ایک آخری مقام میں بقدر نصف ہندسہ کے زیادہ بڑا ہو اور $\text{ما}_{۰}$ اور $\text{ما}_{۴}$ ہر ایک آخری مقام میں بقدر اسی مقدار کے کم ہو تو (۲۱)

اِن ناموافق ترین حالات میں بھی ما$_4$ کی قیمت کے اعشاریہ کے آخری مقام میں صرف ایک واحد ہندسہ کی خطا واقع ہو سکتی ہے۔

نیز اُسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ما_4 = ۴\,ما_3 - ۶\,ما_2 + ۴\,ما_1 - ما_0$$

جس سے بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ ما$_0$، ما$_1$، ما$_2$، ما$_3$ معلوم ہونے کے بعد ما$_4$ کو محسوب کیا جا سکتا ہے۔ لیکن یہ ورائی ادراج (Extrapoiation) ٹھیک نہیں ہوگا کیونکہ اگر ما$_1$ اور ما$_3$ ہر ایک بقدر نصف ہندسہ کے زیادہ بڑا ہو اور ما$_2$ اور ما$_0$ ہر ایک بقدر نصف ہندسہ کے کم ہو اور ایسا ہونا بہت ممکن ہے تو ما$_4$ کی قیمت کے آخری مقام میں مجموعی خطا ۷ یا ۸ ہندسوں تک ہو گی۔

بینی ادراج کا حسب ذیل طریقہ بھی جو بیسل (Bessel) سے منسوب ہے قابل یادداشت ہے۔

فرض کرو کہ ت وہ دلیل ہے جو دو جدولی دلیلوں کے درمیان وسطی نقطہ سے ناپی گئی ہے، جدول کے اِس حصہ کو مبدا کی ہر ایک جانب دو جدولی دلیلوں تک لکھ لو۔

	فرق اول	فرق دوم	فرق سوم
ما$_1$			
	ما$_2$ − ما$_1$		
ما$_2$		ما$_3$ − ۲ما$_2$ + ما$_1$	
	ما$_3$ − ما$_2$		ما$_4$ − ۳ما$_3$ + ۳ما$_2$ − ما$_1$
ما$_3$		ما$_4$ − ۲ما$_3$ + ما$_2$	
	ما$_4$ − ما$_3$		
ما$_4$			

رکھو ا = $\frac{1}{2}$(ما$_3$ + ما$_2$)، ب = ما$_3$ − ما$_2$،

$\text{ج} = \frac{۱}{۲}(\text{ما}_۴ - \text{ما}_۳ - \text{ما}_۲ + \text{ما}_۱)$ ، $\text{د} = \text{ما}_۴ - ۳\,\text{ما}_۳ + ۳\,\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱$

جہاں ا، ب، ج، د وہ مقداریں ہیں جو یا تو مبداء میں سے گزرنے والے افقی خط پر واقع ہیں یا اس خط کی مخالف سمتوں پر دو متصلہ مقداروں کے درمیان حسابی اوسط ہیں۔

ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = -\frac{۱}{۶}\text{ما}_۱(\text{ت}+\frac{۱}{۲})(\text{ت}-\frac{۱}{۲})(\text{ت}-\frac{۳}{۲})$$

$$+\frac{۱}{۲}\text{ما}_۲(\text{ت}+\frac{۳}{۲})(\text{ت}-\frac{۱}{۲})(\text{ت}-\frac{۳}{۲}) - \frac{۱}{۲}\text{ما}_۳(\text{ت}+\frac{۳}{۲})(\text{ت}+\frac{۱}{۲})(\text{ت}-\frac{۳}{۲})$$

$$+\frac{۱}{۶}\text{ما}_۴(\text{ت}+\frac{۳}{۲})(\text{ت}+\frac{۱}{۲})(\text{ت}-\frac{۱}{۲})$$

کیونکہ صریحاً ت کی بجائے علی الترتیب $-\frac{۳}{۲}$ ، $-\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۳}{۲}$ درج کرنے سے $\text{ما}_۱$ ، $\text{ما}_۲$ ، $\text{ما}_۳$ ، $\text{ما}_۴$ حاصل ہوتے ہیں اور ہم یہ مان لیتے ہیں کہ ت کی قریبی قیمتوں کے لیے اسی جملہ سے ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہوں گی۔ (۴۲)

پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$۴۸\,\text{ما} = -\text{ما}_۱(۸\,\text{ت}^۳ - ۱۲\,\text{ت}^۲ - ۲\,\text{ت} + ۳)$$

$$+ ۳\,\text{ما}_۲(۸\,\text{ت}^۳ - ۴\,\text{ت}^۲ - ۱۸\,\text{ت} + ۹)$$

$$- ۳\,\text{ما}_۳(۸\,\text{ت}^۳ + ۴\,\text{ت}^۲ - ۱۸\,\text{ت} - ۹)$$

$$+ \text{ما}_۴(۸\,\text{ت}^۳ + ۱۲\,\text{ت}^۲ - ۲\,\text{ت} - ۳)$$

اور اس لیے

$$۴۸\,\text{ما} = (۸\,\text{ت}^۳ - ۲\,\text{ت})(\text{د} + ۳\,\text{ب}) + (۱۲\,\text{ت}^۲ - ۳)(۲\,\text{ج} + ۲\,\text{ا})$$

$$+ (۵۴\,\text{ت} - ۲۴\,\text{ت}^۳)\,\text{ب} + (۵۴ - ۲۴\,\text{ت}^۲)\,\text{ا}$$

یا $$\text{ما} = \text{ا} + \text{ب ت} + \text{ج}\,\frac{(\text{۲ت}-۱)(\text{۲ت}+۱)}{۸} + \text{د}\,\frac{\text{ت}(\text{۲ت}-۱)(\text{۲ت}+۱)}{۲۴}$$

اگر ت = ۰ تو ما = ا − $\frac{۱}{۸}$ ج جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ دو متصلہ دلیلوں کے درمیان وسطی نقطہ پر کسی دلیل کے لیے تفاعل کی قیمت معلوم کرنا ہو تو متصلہ قیمتوں کے اوسط حسابی میں سے ان ہی افقی خطوں میں جن پر یہ دو متصلہ قیمتیں ہیں واقع شدہ دو دوسرے فرقوں کے اوسط حسابی کے $\frac{۱}{۸}$ کو تفریق کرنا چاہیے۔

اس طریقہ کی صراحت کے لیے ہم حسب ذیل سوال حل کریں گے۔

گرینوچ اوسط دوپہر پر چاند کا اوسط طول بلد پہلی، دوسری، تیسری اور چوتھی مارچ سنہ ۱۸۹۹ء کے لیے معلوم ہے۔ اس کا اوسط طول بلد دوسری مارچ کی آدھی رات معلوم کرنا مطلوب ہے۔

سنہ ۱۸۹۹ء	چاند کا اوسط طول بلد، دوپہر میں	فرق اول	فرق دوم
یکم مارچ	۲۰۵° ۳۸′ ۳۸،۱″		
		+۱۲° ۵۸′ ۶،۹″	
۲، مارچ	۲۱۸° ۳۶′ ۴۵،۰″		+۱۳′ ۱۱،۲″
		+۱۳° ۱۱′ ۱۸،۱″	
۳، مارچ	۲۳۱° ۴۸′ ۳،۱″		+۱۴′ ۴۰،۶″
		+۱۳° ۲۵′ ۵۸،۷″	
۴، مارچ	۲۴۵° ۱۴′ ۱،۸″		

پس مطلوبہ نتیجہ ہے

$\frac{۱}{۲}$ (۲۱۸° ۳۶′ ۴۵،۰″ + ۲۳۱° ۴۸′ ۳،۱″)

− $\frac{۱}{۱۶}$ (۱۳′ ۱۱،۲″ + ۱۴′ ۴۰،۶″)

= ۲۲۵° ۱۰′ ۳۹،۵″

(۲۳)

پہلے باب پر مثالیں

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کروی مثلث سے متعلق کسی ضابطے میں ا، ب، ج، اَ، بَ، جَ کو علی الترتیب ا، ۱۸۰° ـ ب، ۱۸۰° ـ ج، اَ، ۱۸۰° ـ بَ، ۱۸۰° ـ جَ میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ پس نیپیر کی پہلی تمثیلات (۲۰) سے دوسری تمثیلات (۲۱) اخذ کرو۔

مثال ۲۔ بتاؤ کہ کس مفہوم میں ڈلمبر کے ضابطہ (۱۶)

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ج جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب}) = +\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\text{ج جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب})$$

کو شکل

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ج جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب}) = -\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\text{ج جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب})$$

میں بھی لکھا جا سکتا ہے اور ثابت کرو کہ ماقی تین ضابطوں میں بھی علامت کا یہ ابہام موجود ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ

مم ا فرا + مم ب فرب = مم ب فرب + مم ا فرا،

جب ا فرب = جب ج فرب ـ جب ب جم ا فرج ـ جب ب جم ج فرا

مثال ۴۔ اگر ت کی قیمتوں ت_0، ت_1، ت_2 کے جواب میں ما کی قیمتیں علی الترتیب ما_0، ما_1، ما_2 ہوں تو ثابت کرو کہ بینی ادراج کا ایک ضابطہ جو ان معطیات پر منحصر ہو اس مساوات

$$\text{ما} = \text{ما}_0 \frac{(\text{ت} - \text{ت}_1)(\text{ت} - \text{ت}_2)}{(\text{ت}_0 - \text{ت}_1)(\text{ت}_0 - \text{ت}_2)} + \text{ما}_1 \frac{(\text{ت} - \text{ت}_2)(\text{ت} - \text{ت}_0)}{(\text{ت}_1 - \text{ت}_2)(\text{ت}_1 - \text{ت}_0)} + \text{ما}_2 \frac{(\text{ت} - \text{ت}_0)(\text{ت} - \text{ت}_1)}{(\text{ت}_2 - \text{ت}_0)(\text{ت}_2 - \text{ت}_1)}$$

سے ملتا ہے۔

یہ دیکھنا کافی ہے کہ ت کی رقوم میں ما کا یہ جملہ سادہ ترین ہے جس میں ت کی بجائے ت_0، ت_1، ت_2 درج کرنے سے ما کی قیمتیں ما_0، ما_1، ما_2 حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۵ ـ ثابت کرو کہ اگر $\text{ت}_1 - \text{ت}_0 = \text{ت}_2 - \text{ت}_1 = \text{ھ}$ تو مثال (۴) کا

بینی ادراج کا ضابطہ اِس اساسی ضابطہ

$$\text{ب}_{\text{ت}} = \text{ب} + \frac{\text{ت}}{\text{ھ}}(\text{ب}_1 - \text{ب}) + \frac{\text{ت}(\text{ت}-\text{ھ})}{2\text{ھ}^2}(\text{ب}_2 - 2\text{ب}_1 + \text{ب})$$

میں تحویل ہوگا اگر وقت کو ت سے محسوب جائے۔

مثال ۶ ۔ ایفیمرس سے حسب ذیل اندراجات لئے گئے ہیں:۔

گرینوچ اوسط دوپہر

۱۹۰۵ء	سورج کا شمالی میل
۷ اپریل	۶° ۴۰′ ۴۹،۹″
۸ "	۷ ۳ ۲۲،۴
۹ "	۷ ۲۵ ۴۷،۷

ثابت کرو کہ سورج کا میل بتاریخ ۷ اپریل ۱۹۰۵ء بوقت ۶ ب۔ظ (بعد ظہر)[1] ۶° ۴۶′ ۲۸،۷″ ہے۔

مثال ۷ ۔ چاند کا نیم قطر حسب ذیل ہے:۔

(۲۴)

گرینوچ اوسط دوپہر

۱۹۰۹ء	چاند کا نیم قطر
۳ ستمبر	۱۶′ ۲۹،۴۴″
۴ "	۱۶ ۱۸،۶۱
۵ "	۱۶ ۵،۹۷
۶ "	۱۵ ۵۲،۶۹

ثابت کرو کہ چاند کا نیم قطر بتاریخ ۴ ستمبر ۱۹۰۹ء بوقت نیم شب ۱۶′ ۱۲،۴۴″ ہے۔

---

[1] ب۔ظ معادل ہے p.m. کا۔

مثال ۸ ۔ مفروضات ذیل سے بتاریخ ۱۱؍ اگست ۱۹۰۹ء اوسط وقت معلوم کرو جبکہ زہرہ اور مشتری کا ص ۔ م (صعود مستقیم) ایک ہی ہو ۔

اوسط دوپہر	زہرہ کا صعود مستقیم	مشتری کا صعود مستقیم
۱۱؍ اگست ۱۹۰۹ء	۱۱گ ۱۰م ۴۰٫۲۴ش	۱۱گ ۱۳م ۳۵٫۵۸ش
۱۲؍ "	۱۱ ۱۵ ۷٫۲۴	۱۱ ۱۴ ۲۰٫۳۶
۱۳؍ "	۱۱ ۱۹ ۳۳٫۶۱	۱۱ ۱۵ ۵٫۳۱

اگر بتاریخ ۱۱؍ اگست ۱۹۰۹ء بعد دوپہر دن کا کسری حصہ ت ہو تو بینی اندراج کے ضابطوں سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

۱۱گ ۱۰م ۴۰٫۲۴ش + ۲۶۷٫۰۰ش × ت − ۰٫۳۱ش × ت (ت − ۱)

= ۱۱گ ۱۳م ۳۵٫۵۸ش + ۴۴٫۷۸ش × ت + ۰٫۰۸ش × ت (ت − ۱)

یہ ظاہر ہے کہ ت تقریباً $\frac{۴}{۵}$ ہونا چاہیئے ۔ اِس لیے مساوات کی داہنی جانب کی آخری رقم کی بجائے + ۰٫۰۵ ۔ اور بائیں جانب کی آخری رقم کی بجائے − ۰٫۰۱ لکھا جاسکتا ہے ۔ تب مفرد مساوات کو حل کرنے سے ت = ۰٫۷۸۸۷۷ اسلئے مطلوبہ جواب ہے

۱۸گ ۵۵٫۸م

مثال ۹ ۔ ایفیمیرس سے حسب ذیل اندراجات لئے گئے ہیں :۔

	گ ۔ ا ۔ ت	چاند کا صعود مستقیم
۲۱؍ دسمبر ۱۹۰۵ء	۰ گھنٹے	۱۳گ ۳۹م ۵۵٫۶۹ش
	۱۲ "	۱۴ ۷ ۳۲٫۰۴
۲۲؍ دسمبر ۱۹۰۵ء	۰ "	۱۴ ۳۵ ۳۸٫۱۴
	۱۲ "	۱۵ ۴ ۱۶٫۳۱

بیسل کے ضابطے سے، د کو نظرانداز کر کے کیونکہ وہ بہت چھوٹا ہے،

ثابت کرو کہ چاند کا ص - م بتاریخ ۲۱ر دسمبر ۱۹۰۵ء بوقت (۱۸ + ۱۲ لا) گھنٹے یہ تھا

۱۴گ ۲۱م ۹٫۰۳۵ش + (۲۸م ۱۰٫۶ش) لا

+ ۸۶٫۳ش (۲لا - ۱)(۲لا + ۱)

(۲۵)

دوسرا باب

کروی محددوں کا استعمال

۶ ـــ کرہ پر درجہ دار بڑے دائرے ـ

کسی بڑے دائرہ کے محیط کو، تقسیم کرنے والے نشانوں کے ذریعہ ۳۶۰ مساوی حصوں میں منقسم فرض کیا جاتا ہے۔ ان میں سے ایک نشان سے ابتدا کر کے، جسے صفر لیتے ہیں، باقاعدہ ترتیب میں آنے والے متواتر نشانات

۱°، ۲°، ۳°، ...، ۳۵۹° کہلاتے ہیں۔ اس کے بعد کا نشان صفر ہے، پس یہ نقطہ صفر یا ۳۶۰° کہلاتا ہے۔ اس طرح **ایک درجہ دار** بڑا دائرہ حاصل ہوتا ہے، اس میں ہر درجہ کے وقفہ کو حسب ضرورت مزید حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

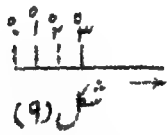
صفر سے ابتدا کرنے میں اعداد کسی ایک سمت میں بڑھ سکتے ہیں اور اس طرح ایک ہی دائرہ کی درجہ بندی ایک ہی صفر نشان سے دو بالکل جداگانہ طریقوں سے عمل میں آسکتی ہے۔

فرض کرو کہ ایک شخص کرہ کے بیرونی جانب ایک درجہ دار بڑے دائرہ پر اس سمت میں چلتا ہے جس میں اعداد بڑھتے ہیں یعنے صفر درجہ سے ایک درجہ کی سمت میں نہ کہ صفر سے ۳۵۹° کی سمت میں۔ تب اس شخص کے بائیں ہاتھ کی طرف بڑے دائرہ کا وہ قطب ہوگا جسے ہم لفظ شُطب (Nole) سے موسوم کر سکتے ہیں اور دائیں ہاتھ کی طرف وہ قطب ہوگا جسے ہم لفظ ضِد شُطب (Antinole) سے موسوم کر سکتے ہیں۔

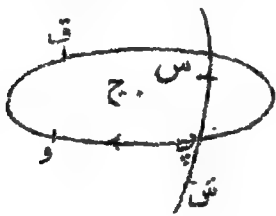
(۲۶) اس طرح اگر ہم ارضی خط استواء کو ایک درجہ دار بڑے دائرے کے طور پر تصور کریں جس کی تقسیم گرینوچ یا پیرس سے مشرقی جانب طول بلدوں کے لیے عمل میں آئی ہو تو زمین کا شمالی قطب اس درجہ دار بڑے دائرہ کا شُطب ہے اور زمین کا جنوبی قطب دائرہ کا ضد شطب ہے۔ برخلاف اس کے اگر خط استواء کی درجہ بندی اس طرح عمل میں آتی کہ اس پر مغربی جانب چلنے سے طول بلد بڑھتے تو ایسے دائرہ کا شُطب زمین کا جنوبی قطب ہوتا اور اس کا ضد شُطب زمین کا شمالی قطب۔

جب کرہ پر کے کسی نقطہ کو ایک درجہ دار بڑے دائرہ کے شُطب کے طور پر بیان کیا جاتا ہے تو اس سے نہ صرف اس بڑے دائرہ کا محل متعین ہوتا ہے بلکہ اس پر کی وہ سمت بھی جس میں درجہ بندی عمل میں آئی ہے۔ اگر دئے ہوئے نقطہ کو اس درجہ دار بڑے دائرہ کے ضد شُطب کے طور پر ظاہر کیا جاتا تو درجہ بندی کی سمت الٹ جاتی کیونکہ تعریف کی رو سے ضد شُطب

اُس شخص کے دائیں ہاتھ کی جانب ہوتا ہے جو اِس بڑے دائرہ پر بڑھتے درجوں کی سمت میں چلتا ہے۔

کسی درجہ دار بڑے دائرہ پر صفر سے ۱° کی سمت ظاہر کرنے کے لیے دائرہ پر ایک تیر کا نشان دیدینا کافی ہے جیسا کہ شکل ۹ اور شکل ۱۰ میں دکھایا گیا ہے۔ بڑھتے درجوں کی سمت کو مثبت سمت کہنا اور گھٹتے درجوں کی سمت کو منفی سمت کہنا سہولت بخش ہوگا۔

شکل (۹)

۷ — کرہ پر کسی نقطہ کے محدد

کسی بڑے دائرہ کو جس کی درجہ بندی مبداء و پر ۰ سے ہوئی ہو حوالہ کا بڑا دائرہ منتخب کرو۔ تب ہم کرہ پر کے کسی نقطہ کے محل کو دو محددوں ع اور ض کی مدد سے جو اِس بڑے دائرہ کے لحاظ سے لئے گئے ہوں بیان کر سکتے ہیں۔

اگر ع اور ض کو خاص قیمتیں دی گئی ہوں تو کرہ پر کا متناظر نقطہ س حسب ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔ مبداء و سے بڑھتے درجوں کی سمت میں بڑے دائرہ پر نقطہ پ ایسا لو کہ

شکل (۱۰)

و پ = ع۔ نقطہ پ پر ایک بڑا دائرہ کھینچو جو و پ پر عمود ہو۔ اب اِس دائرہ پر ایک قوس لینی ہے جو ض کے مساوی ہو۔ اگر ض مثبت ہو تو مطلوبہ نقطہ س کو اُس نیم کرہ میں لینا چاہئے جس میں قطب واقع ہے۔ لیکن اگر ض منفی ہو تو مطلوبہ نقطہ س کو اُس نیم کرہ میں لینا چاہئے جس میں ضد قطب واقع ہے۔ پس جب ع اور ض دئے جاتے ہیں تو کرہ پر نقطہ کا محل ٹھیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے۔ بالعموم

(۲۷)

سہولت اس میں ہے کہ اُس نیم کرہ کو جس میں شطب واقع ہوتا ہے مثبت نیم کرہ کہا جائے اور دوسرے کو جس میں ضد شطب واقع ہوتا ہے منفی نیم کرہ کہا جائے۔

عہ کی منفی قیمتوں پر غور کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ اگر نقطہ ق کو -۹۰° کے طور پر بیان کیا گیا ہو جبکہ زاویہ ن ج ق = -۹۰° تو اس نقطہ ق کو +۲۷۰° سے ظاہر کرتے ہیں بالعموم زاویہ سے سہولت ہوگی جہاں ایسے مثبت سمت میں ناپا گیا ہے۔ پس ہم یہ قرارداد اختیار کرتے ہیں کہ عہ کی تمام قیمتیں ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

نیز ضہ کی قیمتوں کو -۹۰° اور +۹۰° کے درمیان مقید کرنا سہولت بخش ہے کیونکہ اس سے کچھ ابہام رفع ہوتا ہے اور کامل عمومیت بھی برقرار رہتی ہے۔ بلاشبہ دو محدد ہمیشہ ایک نقطہ کی تعین کریں گے لیکن ضہ کی اس قید کے بغیر یہ نتیجہ نہیں نکلے گا کہ ایک نقطہ کے محدد محددوں کا صرف ایک واحد ممکن زوج ہیں۔ مثلاً عہ = ۳۰°، ضہ = +۲۰° سے وہ نقطہ ظاہر ہوگا جو نقطہ عہ = ۲۱۰°، ضہ = +۱۶۰° سے مختلف نہیں ہوگا لیکن اگر ہم یہ قرار دیں کہ ضہ، حدود -۹۰° اور +۹۰° کے باہر واقع نہیں ہوتا تو اس سے نہ صرف یہ لازم آئے گا کہ محددوں کے ایک زوج سے ایک نقطہ متعین ہوتا ہے بلکہ یہ بھی کہ ایک نقطہ بالعموم محددوں کا صرف ایک زوج رکھتا ہے۔ صرف مستثنیٰ صورتیں اساسی دائرہ کے شطب اور ضد شطب ہیں کیونکہ شطب میں ضہ = +۹۰° اور ضد شطب میں ضہ = -۹۰° اور ہر صورت میں عہ غیر متعین ہے۔

مثال ۱۔ ان قیود کو ترک کرکے کہ ۰ ≯ عہ ≯ ۳۶۰° اور -۹۰° ≯ ضہ ≯ ۹۰° ثابت کرو کہ نقطہ عہ = ۴۰°، ضہ = ۳۰°، کو حسب ذیل محددوں میں سے کسی ایک سے بھی برابر تعبیر کیا جا سکتا ہے:

(۲۲۰°، ۱۵۰°)، (-۳۲۰°، ۳۰°)، (-۱۴۰°، ۱۵۰°)، (۴۰۰°، ۳۰°)،

(۵۸۰°، ۱۵۰°)، (۴۰°، ۳۹۰°)، (-۶۸۰°، ۳۰°)

ہم نقطہ کے محل کو بدلے بغیر اس کے محددوں میں سے کسی ایک یا دونوں میں ±۳۶۰° ہمیشہ جمع کر سکتے ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ محددوں کے حسب ذیل جوڑے

عہ ، ضہ ؛

۳۶۰° + عہ ، ضہ ؛

۱۸۰° + عہ ، ۱۸۰° − ضہ ؛

۱۸۰° + عہ ، −۱۸۰° − ضہ ؛

سب کے سب ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں اور اس لئے اِس امر کی تصدیق کرو کہ کرہ پر کے ہر نقطہ کے لیے محددوں کا ایک جوڑا ایسا معلوم کیا جا سکتا ہے کہ

۰ ≯ عہ ≯ ۳۶۰° اور −۹۰° ≯ ضہ ≯ ۹۰°

(۲۸) ۸ ۔ دو نقطوں کو ملانے والی قوس کی جیب التمام کو ان نقطوں کے محددوں میں بیان کرنا۔

فرض کرو کہ ا اَ حوالے کا بڑا دائرہ ہے اور ق اِس کا قطب ہے۔ فرض کرو کہ دئے ہوئے نقطے س اور سَ ہیں۔ چونکہ ا س = ضہ، اِس لیے س ق = ۹۰° − ضہ اور اسی طرح سَ ق = ۹۰° − ضَہ۔ نیز ا اَ = عَہ − عہ اور چونکہ ق ا اور ق اَ میں سے ہر ایک ۹۰° ہے اِس لیے زاویہ س ق سَ = عَہ − عہ

شکل (۱۱)

اب مثلث س ق سَ پر اساسی ضابطہ (۱) لگانے سے

جم طہ = جب ضہ جب ضَہ + جم ضہ جم ضَہ جم (عَہ − عہ) .... (اَ)

جہاں طہ = س سَ ۔

اگر نقطے س اور سَ کرہ پر باہم نزدیک ہوں تو ان کے فاصلہ کی تعیین کے لیے ایک زیادہ آسان ضابطہ اس طرح حاصل کیا جاتا ہے :۔

$$\text{جم طہ} = \text{جب ضہ جب ضہَ} + \text{جم ضہ جم ضہَ جم}\,(\text{عہ} - \text{عہَ})$$

$$= \text{جب ضہ جب ضہَ}\left\{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ}) + \text{جب}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ})\right\}$$

$$+ \text{جم ضہ جم ضہَ}\left\{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ}) - \text{جب}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ})\right\}$$

$$= \text{جم}\,(\text{ضہ} - \text{ضہَ})\,\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ}) - \text{جم}\,(\text{ضہ} + \text{ضہَ})\,\text{جب}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ})$$

اس کو

$$1 = \text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ}) + \text{جب}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ})$$

میں سے تفریق کرو تو

$$\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\,\text{طہ} = \text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ})\,\text{جب}^2\tfrac{1}{2}(\text{ضہ} - \text{ضہَ}) + \text{جب}^2\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ})\,\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{ضہ} + \text{ضہَ})$$

یہ بلا شبہ عام طور پر درست ہے اور اگر طہ بہت چھوٹا ہو تو اس سے تقریبی حل

$$\text{طہ}^2 = (\text{ضہ} - \text{ضہَ})^2 + (\text{عہ} - \text{عہَ})^2\,\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{ضہ} + \text{ضہَ})$$

حاصل ہوتا ہے ۔

ہم اس ضابطہ کو ہندسی طور پر اس طرح ثابت کر سکتے ہیں (شکل ۱۱) :۔

فرض کرو کہ س ن اور سَ نَ علی الترتیب سَ ق اور س ق پر عمود ہیں ۔ چونکہ س نَ سَ ایک بہت چھوٹا مثلث ہے اسلیے

$$\text{س نَ}^2 + \text{نَ سَ}^2 = \text{س سَ}^2$$

پس تقریباً

$$(\text{ضہ} - \text{ضہَ})^2 + (\text{عہ} - \text{عہَ})^2\,\text{جم}^2\,\text{ضہَ} = \text{س سَ}^2$$

اسی طرح مثلث س ن سَ سے

(ضہ - ضہَ)² + (عہ - عہَ)² جم² ضہ = س سَ²

س سَ کی ان دو تقریبی قیمتوں میں صرف یہ فرق ہے کہ ایک میں جم ضہ آتا ہے اور دوسرے میں جم ضہَ ۔ عام طور پر ایک جیب التمام بہت بڑی اور دوسری بہت چھوٹی ہوتی ہے اور اسی لیے تقریب کے لیے جم ضہ اور جم ضہَ کی بجائے ہم ان کا اوسط لکھ سکتے ہیں جو اس طرح معلوم کیا جاتا ہے

½ (جم ضہ + جم ضہَ) = جم ½ (ضہ + ضہَ) جم ½ (ضہ - ضہَ)

= جم ½ (ضہ + ضہَ)

اور یہاں کے اندراج سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے ۔

قائم محدد ۔ فرض کرو کہ نیم قطر ر کے کرہ پر ایک نقطہ عہ، ضہ ہے ۔ ہم (اَ) سے نقطہ (عہ، ضہ) کے قائم محدد اُن محوروں کے حوالے سے معلوم کر سکتے ہیں جن کی تعریف حسب ذیل ہے :-

+ لا کرہ کے مرکز سے نقطہ عہ = ۰، ضہ = ۰ تک ہے

+ ما " " " عہ = ۹۰°، ضہ = ۰ "

+ ی " " ضہ = ۹۰°

پس ہم (ا) میں اندراج کرنے سے دیکھتے ہیں کہ اِن قوسوں کی جیوب التمام جو ق سے اِن تین مثبت محوروں کے میروں تک کھینچی گئی ہیں علی الترتیب یہ ہیں

جم عہ جم ضہ، جب عہ جم ضہ، جب ضہ

اور اسی لیے قائم محدد

لا = ر جم عہ جم ضہ، ما = ر جب عہ جم ضہ، ی = ر جب ضہ ہیں۔

مثال ا ۔ س اور سَ کے درمیان فاصلہ طہ معلوم کرو جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ ضہ = ۱۲° ۲۴′ ۲۵″، ضہَ = ۲۴° ۱۵′ ۴۰″، عہَ - عہ = ۴۲° ۳۸′ ۱۲″

ہم فاصلہ طہ کو راست ضابطہ (اَ) سے معلوم کرتے ہیں

جب ضَہ	۹٫۶۶۱۳۷۳۱	جم ضَہ	۹٫۹۵۹۸۴۴
جب ضہ	۹٫۳۳۲۳۳۴	جم ضہ	۹٫۹۸۹۷۲۸
		جم (عَہ-عہ)	۹٫۸۶۶۶۲۳
	۸٫۹۴۶۰۶۵		۹٫۸۱۶۱۹۵

پس

پہلی رقم	۰٫۰۸۸۳۲۱
دوسری رقم	۰٫۶۵۴۹۳۰
جم ط	۰٫۷۴۳۲۵۱

ط = ۴۱° ۵۹′ ۲۷″

مثال ۲۔ اگر ضہ = ۲۷° ۱۱′ ۶″، ضَہ = ۳۲° ۱۷′ ۲۱″ اور عَہ-عہ = ۲۹° ۱۱′ ۱۳″ تو بتاؤ کہ ط = ۲۵° ۴۶′ ۶″

مثال ۳۔ دو ستاروں کے محدد علی الترتیب $عہ_1$، $ضہ_1$ اور $عہ_2$، $ضہ_2$ ہیں۔ (آ) سے ثابت کرو کہ اِن کو ملانے والے بڑے دائرے کے قطبوں کے محدد (عہ، ضہ) مساواتوں

$$مس ضہ = مم ضہ_1 جم (عہ - عہ_1) = مم ضہ_2 جم (عہ - عہ_2)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اِن مساواتوں کو ہندسی طور پر بھی حاصل کرو۔

مثال ۴۔ سمجھاؤ کہ مثال ۳ کے حل کا اطلاق کس طرح دونوں قطبوں پر ہوتا ہے اور بتاؤ کہ شطب کو ضد شطب سے کس طرح ممیز کیا جا سکتا ہے اگر مثبت سمت پہلے ستارے سے دوسرے ستارے کی سمت ہو۔ (۳۰)

مثال ۵۔ اگر ل، ایک بڑے دائرے کی اُس قوس کا طول ہو جو زمین پر (جسے نصف قطر ر کا ایک کرہ فرض کیا گیا ہے) عرض بلد $لہ_1$ طول بلد $ل_1$ سے عرض بلد $لہ_2$ طول بلد $ل_2$ تک لی گئی ہو تو ثابت کرو کہ

$$ل = ر جم^{-1} (جب لہ_1 جب لہ_2 قط^2 فہ)$$

جہاں

مس^2 فہ = مم لہ$_1$ مم لہ$_2$ جم (ل$_1$ − ل$_2$)

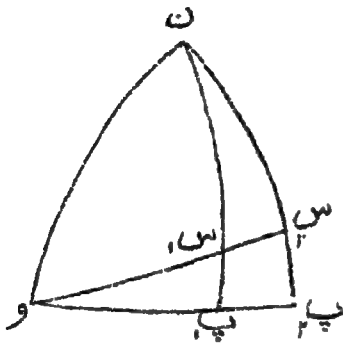
نیز ثابت کرو کہ یہ بڑا دائرہ جس بلند ترین عرض بلد تک پہنچیگا وہ

جم$^{-1}$ (جم لہ$_1$ جم لہ$_2$ جب (ل$_1$ − ل$_2$) قم $\frac{\text{ف}}{2}$)

ہوگا۔

فرض کرو کہ یہ دو نقطے س$_1$، س$_2$ ہیں (شکل ۱۲) اور خط استوا و پ$_1$ پ$_2$ ہے اور شمالی قطب ن ہے۔ تب

جم س$_1$ س$_2$ = جب لہ$_1$ جب لہ$_2$ + جم لہ$_1$ جم لہ$_2$ جم (ل$_1$ − ل$_2$)

اس مثال کے دوسرے جزو کو ثابت کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ س$_1$ س$_2$ (ممدودہ بشرط ضرورت) پر بلند ترین عرض بلد زاویہ س$_1$ و پ$_1$ کے مساوی ہے۔

شکل (۱۲)

اب مثلث ن و س$_1$ سے

جم س$_1$ و پ$_1$ = جب ن و س$_1$ = جب ن س$_1$ جب ن س$_1$ و

= جب ن س$_1$ جب ن س$_2$ جب س$_1$ ن س$_2$ قم س$_1$ س$_2$

مثال ۶ — اس امر کی تصدیق کرو کہ نقطہ (عہ$_1$، ضہ$_1$) اور نقطہ (عہ$_2$، ضہ$_2$) کے درمیان جو فاصلہ ہے اس کے جملہ میں اگر عہ، ضہ کی بجائے علی الترتیب ۱۸۰° + عہ، ۱۸۰° − ضہ رکھا جائے تو اس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اور سمجھاؤ کہ ایسا ہونا کیوں ضروری ہے۔

۹ — کروی محددوں میں دی ہوئی مساوات کا مفہوم۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر عہ اور ضہ دئے گئے ہوں تو ایک نقطہ جسکے محدد یہ مقداریں ہوں کرہ پر پوری طرح متعین ہو جاتا ہے۔ اگر ہمیں عہ اور ضہ کے متعلق سوائے اس کے کچھ معلوم نہ ہو کہ وہ ایک مساوات کو پورا کرتے ہیں جس میں وہ، دوسری مقداروں کے ساتھ جو معلومہ فرض کی جاتی ہیں داخل ہوتے ہیں تو ایسی صورت میں ان دو مجہول مقداروں کو متعین کرنے کے لیے کافی مفروضات موجود نہیں ہوتے۔

عہ کی کوئی قیمت اس مساوات میں مندرج کی جائے تو ضہ میں ایک مساوات حاصل ہوگی جس کی بالعموم ایک یا زیادہ اصلیں معلوم ہو سکیں گی۔ عہ کی مختلف متعدد قیمتیں لیکر اس عمل کو دہرانے سے محددوں عہ، ضہ کے جوڑوں کا ایک ختم نہ ہونے والا سلسلہ حاصل ہوگا۔ ان میں سے ہر جوڑے سے کرہ پر ایک نقطہ متعین ہوگا۔ اگر ان میں سے متعدد نقطوں کو کرہ پر مرتسم کیا جائے تو ان سے ایک منحنی ظاہر ہوگا جس کو کروی سطح پر مرتسم کیا جا سکے گا۔ اب ابتدائی مساوات کو اس منحنی کی مساوات کے طور پر ٹھیک اسی طرح تصور کیا جا سکتا ہے جس طرح لا اور ما میں کوئی مساوات علم ہندسہ تحلیلی میں مستوی منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ (۳۱)

ہم اول یہ بتائیں گے کہ اگر نقطہ عہ، ضہ کے محدد مساوات

ا جب ضہ + ب جب عہ جم ضہ + ج جم عہ جم ضہ = ۰

کو پورا کریں جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں تو اس نقطہ کا طریق ایک بڑا دائرہ ہے جس کے قطبوں کے محدد عَہ، ضَہ اور ۱۸۰° + عَہ، -ضہ ہیں جہاں

$$\text{مس عَہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \text{ ، جب ضَہ} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}}$$

ہم ا کو مثبت لے سکتے ہیں کیونکہ اگر ضرورت پڑے تو تمام رقموں کی علامتیں بدلی جا سکتی ہیں۔ تین نئی مقداریں ھ، عَہ، ضَہ ایسی لو کہ

ا = ھ جب ضہ ، ب = ھ جب عہ جم ضہ ، ج = ھ جم عہ جم ضہ

تو مربع لینے اور جمع کرنے سے ھ = ± √(ا² + ب² + ج²) ۔ اس

جذر المربع کی علامت مثبت لی جائے تو ہمیں پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جب ضہ = مثبت مقدار جو > ا ، اس لیے ضہ مثبت ہے اور چونکہ ضہ > ۹۰° اس لیے ضہ اور ۱۸۰° ۔ ضہ کے درمیان کوئی ابہام نہیں ہے ۔ دوسری اور تیسری مساواتوں سے جم عہ اور جب عہ ملتے ہیں اور اس لیے عہ بغیر کسی ابہام کے معلوم ہوتا ہے اور اس طرح ہمیں ایک حل عہ ، ضہ حاصل ہوتا ہے ۔ لیکن اگر ہم نے ھ کی منفی قیمت لی ہوتی تو پہلی مساوات سے ضہ کی بجائے ۔ ضہ ملتا اور آخری دو مساواتیں عہ کی بجائے صرف ۱۸۰° + عہ رکھنے سے پوری ہو سکتی ہیں ۔ اس لیے دو حل عہ ، ضہ اور ۱۸۰° + عہ ، ۔ ضہ ہیں اور یہ نقطے متقاطر نقطے ہیں ۔ اب ابتدائی مساوات ہو جاتی ہے

ھ {جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم ضہ جم (عہ ۔ عہ)} = ۰

اس لیے نقطہ عہ ، ضہ ثابت نقطہ عہ ، ضہ سے ۹۰° پر ہونا چاہیے اور اس لیے نقطہ عہ ، ضہ کا طریق ایک بڑا دائرہ ہے ۔

مثال ۱ ۔ اگر مساوات

ا جب ضہ + ب جب عہ جم ضہ + ج جم عہ جم ضہ = د

پوری ہو تو نقطہ عہ ، ضہ کا طریق بالعموم ایک چھوٹا دائرہ ہوگا جس کا نصف قطر

$$\text{جم}^{-1} \left\{ \text{د} \backslash \left(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

ہوگا نیز ثابت کرو کہ اگر د² = ا² + ب² + ج² تو مساوات بالا صرف ایک نقطہ کو تعبیر کرتی ہے ۔

مثال ۲ ۔ اگر کرہ پر ایک نقطہ کے رواں محدد عہ ، ضہ ہوں اور

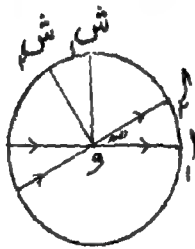
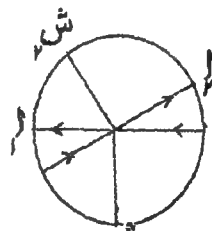
ا، ب مستقل ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

مس ضہ = مس ب جب (عہ - ا)

ایک بڑے دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطب نقطہ عہ = ا + ۲۷۰°، ضہ = ۹۰° - ب ہے -

(۳۲) **۱۰ - دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان اِن کے قطبوں کو ملانے والی اُس قوس کے مساوی ہوتا ہے جو ۱۸۰° سے بڑی نہ ہو -**

دو غیر درجہ دار بڑے دائروں کا میلان بالعموم ناگزیر طور پر مبہم ہوتا ہے کیونکہ یہ میلان دو تکمیلی زاویوں میں سے کوئی ایک ہو سکتا ہے اور یہ ابہام صرف اُس صورت میں رفع ہوتا ہے جبکہ یہ دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں -

لیکن دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ضرور نہیں کہ مبہم ہو کیونکہ ہم دو تکمیلی زاویوں میں سے ہمیشہ اُس زاویہ کو معلوم کر سکتے ہیں جسے اِن دو دائروں کا میلان خیال کیا جاتا ہے - دو بڑے دائروں کے میلان کی یہ تعریف ہے کہ

شکل (۱۳) شکل (۱۴)

یہ وہ زاویہ ۱۸۰° ⊀ ہے جو اِن دائروں کے اُن حصوں کے درمیان ہوتا ہے

جن میں تیر (←) نقطہ تقاطع سے نکلتے ہیں یا نقطہ تقاطع کی طرف آتے ہیں۔
شکل ۱۴ میں دائروں کے دو قطعات جو و سے نکلتے ہیں و أ اور و ا ہیں اور اس لیے زاویہ أ و ا$_1$ (= صہ) لینا ہوگا لیکن اگر ہم صرف و ا پر تیر کی سمت بدل دیں اور شکل میں کوئی اور تبدیلی نہ کریں تو ہمیں وہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے جبکہ شکل (۱۴) میں دکھایا گیا ہے جس میں اب و سے نکلنے والے قطعات و أ اور و ا$_2$ کا درمیانی زاویہ أ و ا$_2$ = ۱۸۰° - صہ ہے اور اس کو اس صورت میں ان دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان لینا ہوگا۔

اگر ا$_1$ أ$_2$ ش$_1$ ش$_2$ (شکل ۱۳) وہ بڑا دائرہ ہو جو و أ$_1$ اور و أ$_2$ دونوں پر عمود ہے تو چونکہ و ا$_1$ = ۹۰° اور و أ$_2$ = ۹۰° اس لیے ا$_1$ أ$_2$ = صہ۔ اگر و ا$_1$ اور و أ$_1$ کے شطب علی الترتیب ش$_1$ اور ش$_2$ ہوں تو أ$_1$ ش$_1$ = ۹۰° اور ا$_2$ ش$_2$ = ۹۰° اور اس لیے

ش$_1$ ش$_2$ = ا$_1$ أ$_2$ = صہ

اسی طرح شکل ۱۴ میں و ا$_1$ کا شطب ش$_1$ اب پچھلی صورت کا ضد شطب ہے۔ چونکہ ا$_2$ و ش$_2$ = ۹۰° اس لیے ا$_1$ و ش$_2$ = ۹۰° - صہ اور چونکہ ا$_1$ و ش$_1$ = ۹۰° اس لیے ش$_1$ و ش$_2$ = ۱۸۰° - صہ جو حسب تشریح بالا اس صورت میں دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ہے۔ (۳۳)

پس ہمیں یہ اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ دو درجہ دار بڑے دائروں کے درمیان میلان ہمیشہ اس قوس سے ناپا جاتا ہے جو ان کے شطبوں کو ملاتی ہے۔

بلاشبہ قوس ش$_1$ ش$_2$ (شکل ۱۳) کے متعلق ایک سوال پیدا ہو سکتا ہے۔ آیا یہ وہ چھوٹی قوس ہے جو ہمیں فطری طور پر لینی چاہیے یا وہ بڑی قوس جو دائرہ پر دوسرے طریقہ سے ش$_1$ سے ا$_2$ اور ا$_1$ پر سے ہوتے ہوئے ش$_2$ تک پہنچنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس طرح دو قوسیں ہیں جو باہم مل کر ۳۶۰° بناتی ہیں اور ان میں سے کوئی قوس ایک لحاظ سے میلان متصور ہو سکتی ہے۔ لیکن ہم کسی ابہام کو جو اس طرح پیدا

ہوتا ہے اِس قرارداد سے رفع کرسکتے ہیں کہ دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان کبھی بھی ۱۸۰° سے متجاوز نہ ہونا چاہئے ۔

مثال ۱ ۔ اگر تین درجہ دار بڑے دائروں پر ب ج، ج ا، ا ب مثبت سمتیں ہوں اور اِن سے مثلث ا ب ج بنے اور اگر اِن کے شطب علی الترتیب اَ، بَ، جَ ہوں تو ثابت کرو کہ

(ا) اگر قطبی مثلث اَ بَ جَ کے ضلعوں پر بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ مثبت سمتیں ہوں تو اِن ضلعوں کے شطب علی الترتیب ا، ب، ج ہیں ۔

(ب) مثلث اَ بَ جَ کے ضلع اور زاوئے مثلث ا ب ج کے زاویوں اور ضلعوں کے علی الترتیب تکملہ ہیں ۔

مثال ۲ ۔ دو درجہ دار دائروں کے شطب عہ۱، ضہ۱ اور عہ۲، ضہ۲ ہیں ۔ اگر اِن دائروں کا میلان صہ ہو تو ثابت کرو کہ

جم صہ = جب ضہ۱ جب ضہ۲ + جم ضہ۱ جم ضہ۲ جم (عہ۱ − عہ۲)

اور اگر اِن دو دائروں کے نقطۂ تقاطع کے محدد عہ، ضہ ہوں تو ثابت کرو کہ

جب ضہ = ± (جم ضہ۱ جم ضہ۲ جب (عہ۲ − عہ۱)) ÷ جب صہ

جم ضہ جم عہ = ± (جم ضہ۱ جب ضہ۲ جب عہ۱ − جب ضہ۱ جم ضہ۲ جب عہ۲) ÷ جب صہ

جم ضہ جب عہ = ± (جب ضہ۱ جم ضہ۲ جم عہ۲ + جب ضہ۲ جم ضہ۱ جم عہ۱) ÷ جب صہ

جہاں اوپر کی اور نیچے کی علامتیں بالترتیب دو تقاطعوں کے متناظر ہیں ۔

۱۱ ۔ دو درجہ دار بڑے دائروں کا تقاطع ۔

فرض کرو کہ ج اور جَ (شکل ۱۵) دو درجہ دار بڑے دائرے ہیں جو دو متناظر نقطوں ط اور طَ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں

فرض کرو کہ ج کا قطب ش ہے اور جَ کا قطب شَ ۔
کوئی نقطہ جو جَ پر مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے نقطہ ط پر
اگر اُس مثبت نیم کرہ کے اندر داخل ہوتا ہے جو ج سے محدود ہے ۔
اس لیے ہم کہتے ہیں کہ ط، ج کے لحاظ سے جَ کا **صعودی عقدہ** ہے ۔
کوئی نقطہ جو جَ پر مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے طَ پر اگر اُس منفی
نیم کرہ میں داخل ہوتا ہے جو ج سے محدود ہے ۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ
طَ، ج کے لحاظ سے جَ کا **نزولی عقدہ** ہے ۔ (۳۴)

اگر ج پر و مبدا ہو جہاں سے محددوں کی پیمائش ہوئی ہے اور
اگر و پ = عہ، پ شَ = ضہ تو ج کے لحاظ سے شَ کے محدد
جو جَ کا قطب ہے عہ اور ضہ ہیں ۔

اب چونکہ دفعہ ۱۰ کی رو سے دو درجہ دار بڑے دائروں کا درمیانی
زاویہ اِن کے قطبوں کی درمیانی قوس ہوتی ہے اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج اور جَ
کا درمیانی زاویہ یا میلان °۹۰ ـ ضہ ہے ۔ پس

$$\text{وط} = \text{و پ} + \text{پ ط} = \text{عہ} + ۹۰^\circ،$$

$$\text{وطَ} = \text{و ط} + ۱۸۰^\circ = \text{عہ} + ۲۷۰^\circ،$$

اور اِس لیے حسب ذیل عام بیان حاصل ہوتا ہے:۔

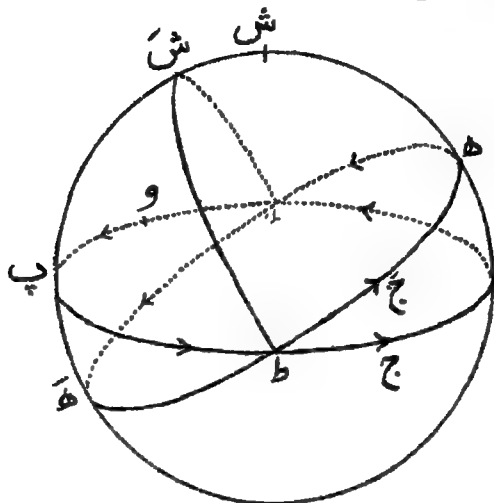
اگر ایک درجہ دار بڑے دائرہ جَ کے قطب کے محدد، بلحاظ دوسرے
بڑے دائرہ ج کے، عہ، ضہ ہوں تو

اِن دائروں کا میلان °۹۰ ـ ضہ ہے،

ج پر جَ کے صعودی عقدہ کے محدد °۹۰ + عہ، ۰ ہیں،

اور ج پر جَ کے نزولی عقدہ کے محدد °۲۷۰ + عہ، ۰ ہیں ـــ

اگر ج پر جَ کے صعودی عقدہ کے محدد (قہ، ۰) لیے جائیں جس سے
اکثر سہولت پیدا ہوتی ہے اور اگر صہ کو اِن دائروں کا میلان قرار
دیا جائے تو جَ کے قطب کے محدد (قہ + °۲۷۰، °۹۰ ـ صہ) حاصل

ہوسکتے ہیں جبکہ ج حوالہ کا دائرہ ہو۔

شکل (۱۵)

(۳۵) عام طور پر ایک بڑے دائرہ کے لحاظ سے دوسرے بڑے دائرہ کا محل اور اس کی درجہ بندی کی سمت مقرر کرنے کے لیے اس دوسرے دائرہ کے تین مبدل بلحاظ پہلے دائرہ کے معلوم ہونے چاہئیں۔ مثلاً دوسرے بڑے دائرے کے شطب کے دو محدد دئے جا سکتے ہیں کیونکہ اس سے شطب کا محل متعین ہوتا ہے اور پھر نہ صرف وہ بڑا دائرہ متعین ہوتا ہے جس کا قطب یہ شطب ہے بلکہ وہ سمت بھی معلوم ہوتی ہے جس میں دوسرے بڑے دائرہ کی درجہ بندی ہوئی ہے۔ اگر ہمیں صرف اس بڑے دائرہ کے ایک قطب کے محدود دئے جاتے تو بلاشبہ بڑے دائرہ کا محل متعین ہوجاتا لیکن جب تک یہ معلوم نہ ہو کہ دیا ہوا قطب شطب ہے یا ضد شطب اس وقت تک درجہ بندی کی سمت معلوم نہیں کی جا سکتی۔ تیسرا مبدل اس دوسرے بڑے دائرہ پر درجہ بندی کے مبداء کو مقرر کرنے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔

یا دوسرے دائرہ کے صعودی عقدہ ق کا محل پہلے دائرہ پر

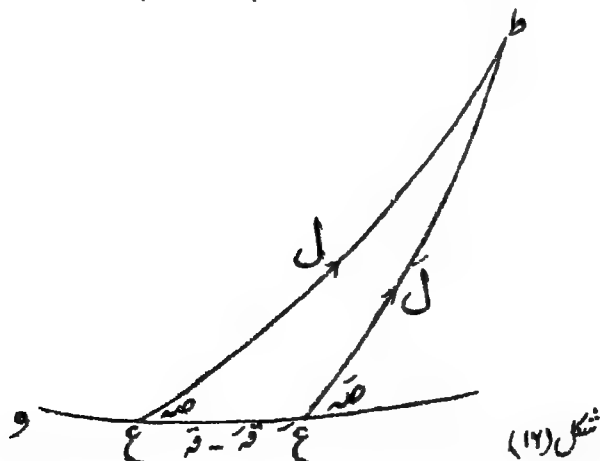
اور نیز میلان صہ دئے جا سکتے ہیں۔ پہلے دائرہ کے مبداء سے مثبت سمت میں چل کر ہم قہ دریافت کر لیتے ہیں اور اِس طرح صعودی عقدہ معلوم ہو جاتا ہے۔ اِس صعودی عقدہ پہ دوسرا بڑا دائرہ پہلے دائرہ کے مثبت نیم کرہ میں داخل ہو رہا ہوگا۔ اگر ہم اس عقدہ سے دو **منتشع قوسیں** کھینچیں جن کا درمیانی زاویہ صہ ہو تو مطلوبہ دائرہ کا ٹھیک مقام معلوم کرنے میں کوئی ابہام درپیش نہ ہوگا۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ ج کے لحاظ سے جَ کا صعودی عقدہ جَ کے لحاظ سے ج کا نزولی عقدہ ہے۔

مثال ۲۔ شکل بنا کر یہ بتاؤ کہ اُن دو درجہ دار بڑے دائروں کے درمیان کیا فرق ہے جن کے میلان حوالے کے بڑے دائرہ کے ساتھ مساوی ہیں اور جن کے صعودی عقدے مبداء سے فاصلوں طہ اور طہ + ۱۸۰° پر واقع ہیں۔

مثال ۳۔ اگر ایک بڑے دائرہ ل کے صعودی عقدہ کا طول بلد قہ ہو اور اِس کا میلان حوالے کے محور کے ساتھ صہ ہو اور اگر دوسرے بڑے دائرہ لَ کی متناظر مقداریں قہَ، صہَ ہوں تو ل پہ لَ کے صعودی عقدہ ط کے محدد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حوالے کے دائرہ و ع عَ (شکل ۱۶) پہ عقدے ع، عَ ہیں تب ل پہ لَ کا صعودی عقدہ ط ہے۔ فرض کرو کہ فاصلہ ع ط، لا ہے۔ اب لا کو صہ، صہَ اور قہَ - قہ کی رقوم میں معلوم کرنا ہے۔

شکل (۱۶)

دفعہ (۱) کے ضابطہ (۶) سے

مم لا جب (قہَ ـ قہ) ـ جم (قہَ ـ قہ) جم صہ = ـ جب صہ مم صہَ

اس لیے مم لا = جم (قہَ ـ قہ) جم صہ ـ جب صہ مم صہَ / جب (قہَ ـ قہ)

اب یہ معلوم کرنے کے لیے کہ لا کی کونسی قیمت لی جائے ہم دیکھتے ہیں کہ

جب لا : جب (قہَ ـ قہ) :: جب صہَ : جب ط

اور ط اور صہَ دونوں > ۱۸۰° ـ اس لیے جب لا کی وہی علامت ہونی چاہیے جو جب (قہَ ـ قہ) کی ہے اور اس سے یہ معلوم ہوگا کہ مطلوبہ زاویہ لا ہے یا لا + ۱۸۰° ـ جب لا معلوم ہو جائے تو مساواتوں (۳۶)

جب ضہ = جب لا جب صہ'

جم ضہ جم (عہ ـ قہ) = جم لا'

جم ضہ جب (عہ ـ قہ) = جب لا جم صہ'

سے ط کے محدد عہ' ضہ (حوالے کے دائرہ کے لحاظ سے) معلوم ہوتے ہیں ـ

مثال ۴ ـ پچھلی مثال کے مفروضات کو لیکر اُن دو بڑے دائروں کا درمیانی میلان غہ معلوم کرو جن کی تعیین علی الترتیب قہ' صہ اور قہَ' صہَ سے ہوتی ہے ـ

ہم معلوم کر چکے ہیں کہ قطبوں کے محدد قہ + ۲۷۰°' ۹۰° ـ صہ اور قہَ + ۲۷۰°' ۹۰° ـ صہَ ہیں اور اس لیے دفعہ ۱۰ مثال ۲ کی رو سے

جم غہ = جم صہ جم صہَ + جب صہ جب صہَ جم (قہ ـ قہَ)

مثال ۵ ـ مقادیر (قہ' صہ) اور (قہَ' صہَ) سے مشخص ہونیوالے دو بڑے دائروں کے مشترک عمود کا طول اگر لا ہو تو ثابت کرو کہ

جم لا = جم صہ جم صہَ + جب صہ جب صہَ جم (قہ ـ قہَ)

۱۲ ـ محددوں کا استحالہ ـ

فرض کرو کہ ایک نقطہ کے محدد بلحاظ ایک درجہ دار بڑے دائرے کے دئے گئے ہیں تو اکثر اس امر کی ضرورت درپیش ہوتی ہے کہ اسی نقطہ کے

محدد بلحاظ دوسرے درجہ دار بڑے دائرہ کے معلوم کئے جائیں ۔

فرض کرو کہ نقطہ پ کے ابتدائی محدد عہ، ضہ ہیں اور نئے نظام میں اسی نقطہ پ کے محدد عہَ، ضہَ ہیں ۔ فرض کرو کہ اسی طرح کسی اور نقطہ پ۱ کے ابتدائی محدد عہ۱، ضہ۱ اور تبدیل شدہ محدد عہَ۱، ضہَ۱ ہیں ۔ اب چونکہ اس استحالہ سے فاصلہ پ پ۱ متاثر نہیں ہوسکتا اس لیے یہ فاصلہ وہی ہونا چاہئے خواہ ہم اسے کسی محددوں میں بیان کریں اور اس لیے (دفعہ ۸)

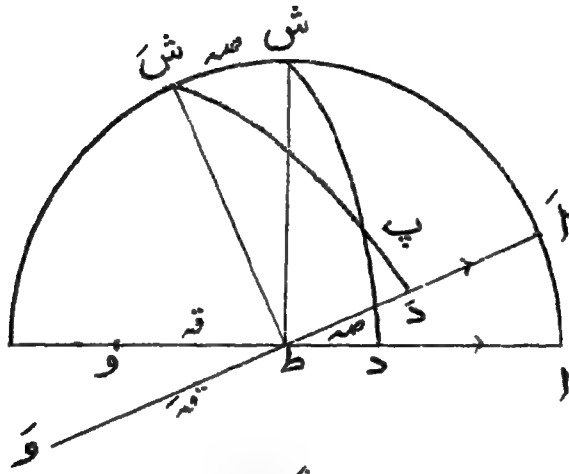
جب ضہَ جب ضہَ۱ + جم ضہَ جم ضہَ۱ جم (عہَ — عہَ۱) (۳۷)

= جب ضہ جب ضہ۱ + جم ضہ جم ضہ۱ جم (عہ — عہ۱) ... (اَ)

وہ سب ضابطے جو اس استحالہ سے متعلق ہیں فی الحقیقت اس مساوات میں شامل ہیں ۔

اگر کسی نقطہ پ۱ کے محدد دونوں نظامات میں معلوم ہوں یعنی اگر عہ۱، ضہ۱، عہَ۱، ضہَ۱ معلوم ہوں اور اگر ان قیمتوں کو (اَ) میں مندرج کیا جائے تو عہ، ضہ اور عہَ، ضہَ میں بالعموم ایک مساوات حاصل ہوگی ۔ اسی طرح کسی اور نقطے کے محدد دونوں نظامات میں معلوم ہوں تو عہ، ضہ اور عہَ، ضہَ میں ایک دوسری مساوات حاصل ہوگی ۔ اس طرح عہَ، ضہَ کو عہ، ضہ کی رقوم میں بیان کرنے کے لیے دو مساواتیں مل جاتی ہیں ۔

لیکن عہَ، ضہَ کو عہ، ضہ کی رقوم میں یگانہ طور پر معلوم کرنے کے لئے دو مساواتیں کافی نہیں ہیں کیونکہ فاصلوں پ پ۱، پ پ۲ سے پ کا مقام بغیر ابہام کے متعین نہیں ہوتا ۔ صریحاً دو مقامات ہیں جن کو پ اختیار کرسکتا ہے ۔ ان مقامات کے فاصلے کسی تیسرے نقطہ پ۳ سے مساوی نہیں ہوں گے سوائے اس صورت کے کہ پ۳ اُس بڑے دائرہ پر واقع ہو جائے جو پ۱ پ۲ میں سے گزرتا ہے ۔ اس صورت کو خارج کرکے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کوئی نقطہ صرف اس وقت متعین ہوسکتا ہے جبکہ اس کے فاصلے تین دئے ہوئے نقطوں سے

معلوم ہوں۔ پس ہمیں عہ، ضہ اور عہَ، ضہَ کے درمیان ایک تیسری
مساوات معلوم کرنی چاہیئے اور وہ اِس طرح کہ کوئی تیسرا نقطہ لیا جائے
جس کے محدد دونوں نظامات میں عہ، ضہ، اور عہَ، ضہَ معلوم ہوں
اور جو اس بڑے دائرہ پر واقع نہ ہو جو پہلے منتخب کئے ہوئے دو نقطوں
میں سے گذرتا ہے۔

شکل (۱۷)

(۳۸) فرض کرو کہ ابتدائی بڑا دائرہ و ا (شکل ۱۷) ہے جس کی درجہ بندی
تیر کی سمت میں مبداء و سے ہوئی ہے اور جس کا قطب ش ہے۔ فرض
کرو کہ وَ اَ وہ بڑا دائرہ ہے جس کے لحاظ سے محددوں کو تبدیل کرنا ہے
اس کا قطب شَ اور مبداء وَ ہے۔ فرض کرو کہ پہلے دائرہ پر دوسرے
دائرہ کا صعودی عقدہ ط ہے اور اس کے فاصلے و اور وَ سے علی الترتیب
قہ، قہَ ہیں۔ فرض کرو کہ اِن دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان صہ
ہے۔ پس قہ، قہَ، صہ وہ تین مبدل ہیں جو پہلے دائرہ کے لحاظ
سے دوسرے درجہ دار بڑے دائرہ کو پوری طرح متعین کرتے ہیں
(دفعہ ۱۱)۔

اب ہمیں ایسے تین نقطوں کا انتخاب کرنا ہے جو ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع نہ ہوں اور ایسے ہوں کہ اِن کے محدد دونوں نظامات میں بالراست معلوم ہو سکیں۔

جو نقطے ہم منتخب کریں گے وہ علی الترتیب ط، ا اور ش ہیں۔ شکل سے یہ واضح ہے کہ دونوں نظامات میں اِن نقطوں کے محدد حسب ذیل ہیں کیونکہ ط ا = ط اَ = ۹۰°:۔

ط کے لیے عہ = قہ، ضہ = ۰ اور عہَ = قہَ، ضہَ = ۰

ا کے لیے عہ = ۹۰° + قہ، ضہ = ۰ اور عہَ = ۹۰° + قہَ، ضہَ = -صہ

ش کے لیے عہ = ۰، ضہ = ۹۰° اور عہَ = ۹۰° + قہَ، ضہَ = ۹۰° - صہ

اِن محددوں کو باری باری سے مساوات (اُ) میں درج کرنے سے استحالہ کے عام ضابطے حاصل ہوتے ہیں

جم ضہ جم (عہ - قہ) = جم ضہَ جم (عہَ - قہَ) .... (۳َ)

جم ضہ جب (عہ - قہ) = -جب ضہَ جب صہ + جم ضہَ جم صہ جب (عہَ - قہَ) ... (۴َ)

جب ضہ = جب ضہَ جم صہ + جم ضہَ جب صہ جب (عہَ - قہَ) (۶َ)

اِن سے حسب ذیل ضابطے اخذ کئے جا سکتے ہیں

جم ضہَ جم (عہَ - قہَ) = جم ضہ جم (عہ - قہ) ... (۴َ)

جم ضہَ جب (عہَ - قہَ) = جب ضہ جب صہ + جم ضہ جم صہ جب (عہ - قہ) .. (۵َ)

جب ضہَ = جب ضہ جم صہ - جم ضہ جب صہ جب (عہ - قہ) .. (۶َ)

کیونکہ (۳َ) کو جم صہ سے اور (۴َ) کو جب صہ سے ضرب دیکر اِن کو جمع کرنے سے (۵َ) حاصل ہوتا ہے اور (۴َ) کو جم صہ سے اور (۳َ) کو جب صہ سے ضرب دیکر تفریق کرنے سے (۶َ) حاصل ہوتا ہے۔

مساواتوں کے پہلے جٹ سے محددوں عہ، ضہ کی تعیین ہوتی ہے جبکہ عہَ، ضہَ معلوم ہوں اور دوسرے جٹ سے محددوں عہَ، ضہَ کی تعیین ہوتی ہے جبکہ عہ، ضہ معلوم ہوں۔

کروی محددوں کو تبدیل کرنے کے اساسی ضابطے دوسرے طریقہ سے بھی

ثابت کئے جا سکتے ہیں جو حسب ذیل ہے۔

چونکہ ش شَ (شکل ۱۷) کا قطب ط ہے اِس لیے زاویہ ط ش شَ = ۹۰° نیز زاویہ ط ش د = عہ - قہ اور اِس لیے زاویہ شَ ش پ = ۹۰° + عہ - قہ۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ عَہ - قَہ = زاویہ ط شَ دَ، اِس لیے زاویہ ش شَ پ = ۹۰° - عَہ + قَہ۔ شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ ش پ = ۹۰° - ضہ، شَ پ = ۹۰° - ضَہ اور ش شَ = صہ۔ پس مثلث ش شَ پ میں اِس کے تین ضلعوں اور دو زاویوں کے لیے جملے حاصل ہو گئے اور اِس لیے دفعہ (۱) کے اساسی ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) سے ہم ضابطے (۲َ)، (۳َ)، (۴) اخذ کرتے ہیں۔ (۳۹)

استعمال کے ضابطوں میں تین مساواتوں کو حاصل کرنے کی ضرورت جس کا ذکر پہلے آ چکا ہے ضابطوں (۲َ)، (۵َ) اور (۶َ) سے واضح کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ مساواتوں (۲َ) اور (۵َ) سے عَہ اور ضَہ کی قیمتیں تلاش کرنی ہیں۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

مس (عَہ - قَہ) = {جب ضہ جب صہ + جم ضہ جم صہ جب (عہ - قہ)} قطا ضہ قط (عہ - قہ)

چونکہ بائیں جانب کی سب مقداریں معلومہ ہیں اِس لیے مس (عَہ - قَہ) معلوم ہو جاتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ زاویہ (< ۱۸۰°) ط ہے جس کے مماس کی قیمت یہ ہے، تب (عَہ - قَہ) کو ہونا چاہیئے ط یا ط + ۱۸۰°۔ ہم مساوات (۲َ) سے اِس بات کا تصفیہ کر سکتے ہیں کہ عَہ - قَہ کے لیے کونسی قیمت لینی چاہیئے کیونکہ ضہ اور ضَہ ہمیشہ حدود - ۹۰° اور + ۹۰° کے درمیان رہتے ہیں اور اِس لیے ضروری ہے کہ جم ضہ اور جم ضَہ دونوں مثبت ہوں۔ اِس لیے جم (عَہ - قَہ) کی علامت وہی ہونی چاہیئے جو جم (عہ - قہ) کی ہے۔ اس طرح یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ عَہ - قَہ کو ط ہونا چاہیئے یا ۱۸۰° + ط کیونکہ اِن میں صرف ایک قیمت ایسی ہو گی جو علامت میں جم (عہ - قہ)

کے ساتھ مطابقت کرے گی۔

پس اِن دو مساواتوں (۲´) اور (۵´) سے (عہَ - قہَ) بغیر کسی ابہام کے متعین ہوتا ہے اور اس لیے عہَ معلوم ہوتا ہے۔ پھر ہم (۲´) سے جم ضہَ معلوم کرتے ہیں۔ یہاں پہنچ کر دو مساواتوں کا ناکافی ہونا واضح ہو جاتا ہے کیونکہ گو ضہَ کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے لیکن اِس کی علامت غیر متعین رہتی ہے۔ اس لیے (۶´) جیسی تیسری مساوات کی ضرورت لاحق ہوتی ہے جس سے جب ضہَ کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور اِس لیے ضہَ کی علامت متعین ہو جاتی ہے۔

عہَ، ضہَ کو مساواتوں (۲´)، (۵´) اور (۶´) سے معلوم کرنے کا مسئلہ اس طرح بھی حل کیا جا سکتا ہے :-

مساوات (۶´) سے جب ضہَ کی تعیین ہوتی ہے اور اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ضہَ، دو تکمیلی زاویوں میں سے کونسا زاویہ ہے۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ - ۹۰° ≯ ضہَ ≯ ۹۰° اور اِس لیے ضہَ کے لیے ہم تکمیلی زاویوں میں سے وہ قیمت اختیار کرتے ہیں جو اِس شرط کو پوری کرتی ہے اس طرح ضہَ معلوم ہوتا ہے اور اِس لیے جم ضہَ۔ پھر مساوات (۲´) سے جم (عہَ - قہَ) حاصل ہوتا ہے اور مساوات (۵´) سے جب (عہَ - قہَ) اِس لیے عہَ - قہَ بغیر کسی ابہام کے متعین ہوتا ہے کیونکہ اس کی جیب اور جیب التمام دونوں معلوم ہیں۔

مثال ۱ - اگر عہَ = ۹۰° + قہَ، ضہَ = ۰ تو ثابت کرو کہ عہ = ۹۰° + قہ، ضہ = صہ اور وہ نقطہ معلوم کرو جو کرہ پر مرتسم ہوتا ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ وَ اَ کے شطب کے محدد پہلے اور دوسرے نظاموں میں علی الترتیب

عہ = ۲۷۰° + قہ، ضہ = ۹۰° - صہ

اور عہَ غیر متعین اور ضہَ = ۹۰° ہیں۔

نیز اِس امر کی تصدیق کرو کہ یہ مقداریں مساواتوں (۲´)، (۳´)، (۴´) کو پورا کرتی ہیں۔

(۴۰)

مثال ۳ — مساواتوں (۲')، (۳')، (۴') کی تصدیق کے طور پر یہ بتاؤ کہ بائیں جانب کے ارکان کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ مساواتوں (۳') اور (۴') سے مساواتیں (۵') اور (۶') فوراً لکھی جاسکتی تھیں۔

کیونکہ ط، وَ اَ کے لحاظ سے و ا کا نزولی عقدہ ہے۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عہ اور ضہ کو عہَ اور ضہَ کے ساتھ باہم متبادل کیا جاسکتا ہے اگر ساتھ ہی قہ اور قہَ میں سے ہر ایک میں ۱۸۰° کا اضافہ کیا جائے۔

مثال ۵ — اگر دو درجہ دار بڑے دائروں کے مستوی منطبق ہوں اور اگر کرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد ایک بڑے دائرہ کے لحاظ سے عہ، ضہ اور دوسرے بڑے دائرہ کے لحاظ سے عہَ، ضہَ ہوں تو ان محددوں میں ربط معلوم کرو۔

عام ضابطوں (۴')، (۵')، (۶') میں ہم صہ = ۰ رکھتے ہیں اگر ان دو دائروں کی درجہ بندی ایک ہی سمت میں ہوئی ہو اور صہ = ۱۸۰° رکھتے ہیں اگر ان کی درجہ بندی مخالف سمتوں میں ہوئی ہو۔ پہلی صورت میں

جم ضہَ جم (عہَ - قہَ) = جم ضہ جم (عہ - قہ)،

جم ضہَ جب (عہَ - قہَ) = جم ضہ جب (عہ - قہ)،

جب ضہَ = جب ضہ

اس لیے ضہَ = ضہ اور عہَ = عہ + قہَ - قہ

دوسری صورت میں

جم ضہَ جم (عہَ - قہَ) = جم ضہ جم (عہ - قہ)،

جم ضہَ جب (عہَ - قہَ) = - جم ضہ جب (عہ - قہ)،

جب ضہَ = - جب ضہ

اس لیے ضہَ = - ضہ، عہَ = قہ + قہَ - عہ

محدد ضہ یہاں علامت بدلتا ہے کیونکہ درجہ بندی کی سمت کو الٹ دینے سے مثبت اور منفی نیم کروں کا باہمی تبادلہ ہوتا ہے۔

مثال ۶ — فرض کرو کہ بنیادی درجہ دار بڑا دائرہ س ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ پ کے محدد بلحاظ س کے بہ، لہ ہیں۔ فرض کرو کہ سَ کوئی دوسرا درجہ دار بڑا دائرہ ہے اور اس کے قطب کے محدد بلحاظ س کے بہ، لہ ہیں۔ فرض کرو کہ س پر سَ کے صعودی عقدہ کی علامت قہ سے سَ کے لحاظ سے درجے منٹ اور ثانئے تعبیر ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ سَ کے لحاظ سے پ کے محدد بہَ، لہَ ہیں۔ ثابت کرو کہ بہَ، لہَ کو بہ، لہ کی رقوم میں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں

جم بہَ جم (لہَ - قہ) = جم بہ جب (لہ - لہ)،
جم بہَ جب (لہَ - قہ) = جب بہ جم بہ - جم بہ جب بہ جم (لہ - لہ)،
جب بہَ = جب بہ جب بہ + جم بہ جم بہ جم (لہ - لہ)

اور بہ، لہ کو بہَ، لہَ کی رقوم میں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں

جم بہ جب (لہ - لہ) = جم بہَ جم (لہَ - قہ)،
جم بہ جم (لہ - لہ) = جب بہَ جم بہ - جم بہَ جب بہ جب (لہَ - قہ)،
جب بہ = جب بہَ جب بہ + جم بہَ جم بہ جب (لہَ - قہ)

(۲۱) مثال ۷ — فرض کرو کہ دو ستاروں کے محدد پہلے نظام میں عم۱، ضم۱ اور عم۲، ضم۲ اور دوسرے نظام میں عمَ۱، ضمَ۱ اور عمَ۲، ضمَ۲ ہیں۔ چونکہ دو ستاروں کا باہمی فاصلہ دونوں نظاموں میں وہی ہونا چاہیئے اس لیے

جب ضم۱ جب ضم۲ + جم ضم۱ جم ضم۲ جم (عم۱ - عم۲)

= جب ضمَ۱ جب ضمَ۲ + جم ضمَ۱ جم ضمَ۲ جم (عمَ۱ - عمَ۲)

اس کی تصدیق مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) سے کرو۔

مثال ۸ — کرہ پر کے محددوں میں ان تبدیلیوں کی تشریح کرو جو کرہ کو اندر کی طرف سے یا باہر کی طرف سے دیکھنے میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور ثابت کرو کہ ضا بلطے غیر متغیر رہتے ہیں۔

کرہ کو باہر کی طرف سے دیکھتے ہیں وہ جیسا نظر آتا ہے اس کی بنا پر

شکل (۱۷) کھینچی گئی ہے اور بالعموم شکلیں اسی لحاظ سے کھینچی جاتی ہیں ۔
لیکن اگر ہم چاہیں کہ شکل (۱۷) کرہ کے ایک حصہ کو تعبیر کرے جبکہ اسے اندر کی طرف سے دیکھا جائے تو ط نزولی عقدہ ہوگا ۔ پس ضابطوں میں قہ اور ضہ کی بجائے ۱۸۰° + قہ اور − ضہ لکھنا ہوگا اور اسی طرح قہ' ضہ' کی بجائے ۱۸۰° + قہ' اور − ضہ' ۔ لیکن ان تبدیلیوں سے ضابطوں (۴') '(۵') '(۶') میں کوئی تغیر نہیں ہوتا ۔

مثال ۹ ۔ اگر دو نقطوں کے محدد عہ، ضہ اور عہ'، ضہ' ہوں تو ثابت کرو کہ اس بڑے دائرہ کے عقدے جو انہیں ملاتا ہے مبدا سے فاصلوں ل اور ل + ۱۸۰° پر واقع ہیں جہاں

ل = ½ (عہ + عہ') − مس⁻¹ { [جب (ضہ' + ضہ) / جب (ضہ' − ضہ)] مس ½ (عہ' − عہ) }

۱۳ ۔ لوکارتموں کا استعمال

۔ اگر استحالہ شدہ محددوں عہ' ضہ' کو محسوب کرنے میں مساواتیں (۴') '(۵') '(۶') اسی شکل میں استعمال کی جائیں جس میں وہ دفعہ (۱۲) میں لکھی گئی ہیں تو مساوات (۶') کی بائیں جانب کی دو رقموں کو لوکارتموں کی مدد سے محسوب کرنا ہوگا اور پھر ضہ' کو طبعی جیوب کی جدول سے معلوم کرنا ہوگا ۔ مساوات (۴') سے جم (عہ' − قہ') معلوم ہوگا اور مساوات (۵') صرف عہ' − قہ' کی علامت متعین کرنے میں استعمال ہوگی، اس کے لیے صرف بائیں جانب کی دو رقموں کے لوکارتموں کو محسوب کرنے کی ضرورت ہے اگرچہ یہ رقمیں مختلف العلامت ہی کیوں نہ ہوں ۔

لیکن اکثر سہولت اس میں خیال کی گئی ہے کہ ضابطوں (۴') '(۵') '(۶') کا استحالہ ایسی امدادی مقداروں کے ذریعہ عمل میں لایا جائے جن کے ادخال سے یہ ضابطے لوکارتمی عمل حساب کے لیے زیادہ موزوں ہو جاتے ہیں ۔ ایسا کرنے کا بہترین طریقہ حسب ذیل ہے :-

فرض کرو کہ م ایک مثبت مقدار ہے اور مر٬ صفر اور ۳۶۰° کے درمیان٬ ایک زاویہ ہے اور یہ دونوں مقداریں ایسی ہیں کہ

جب ضہ = م جم مر٬ جم ضہ جب (عہ — قہ) = م جب مر

اس لیے ٹس مر = ٹم ضہ جب (عہ — قہ)۔ اگر مر وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ ہے جو اسے پورا کرتا ہے تو مر٬ مر ہے یا مر + ۱۸۰°۔ چونکہ م مثبت ہے اس لیے مر کی وہ قیمت منتخب کرنی چاہیئے کہ جم مر کی وہی علامت حاصل ہو جو جب ضہ کی ہے۔ اس طرح لوک م اور مر معلوم ہو جاتے ہیں۔ ان امدادی مقداروں کو (۲٬)٬ (۵٬)٬ (۶٬) میں درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں

(۴۲)

جم ضہَ جم (عہَ — قہَ) = جم ضہ جم (عہ — قہ)
جم ضہَ جب (عہَ — قہَ) = م جب (مر + صہ) ..... (۱٬)
جب ضہَ = م جم (مر + صہ)

ان میں سے آخری ضابطے سے ضہَ کی مقدار (< ۹۰°) اور علامت دونوں حاصل ہوتے ہیں۔ اس قیمت کو دوسرے دو ضابطوں میں درج کرنے سے جم (عہَ — قہَ) اور جب (عہَ — قہَ) دونوں معلوم ہوتے ہیں۔ پہلے ضابطے سے عہَ — قہَ کی مقدار ملتی ہے اور دوسرے سے اس کی علامت۔

مثال ۱ — ایک نقطہ کے محدد عہ = ۵ ۵° ٬ ضہ = ۱۵° ہیں۔ ضابطوں (۲٬)٬ (۵٬)٬ (۶٬) سے ثابت کرو کہ جب ان محددوں کو مقداروں قہ = ۲۱۵° ٬ صہ = ۲۳° ۳۰َ ٬ قہَ = ۱۱۵° سے متعین ہونے والے دائرہ کے لحاظ سے مستحیل کیا جاتا ہے تو یہ محدد ہو جاتے ہیں عہَ = ۲۲۷° ۳۱َ ٬ ضہَ = ۲۹° ۰۶َ۔

مثال ۲ — اگر مثال ۱ کو امدادی مقداروں مر اور م کی مدد سے حل کیا جائے تو ثابت کرو کہ مر = ۲۹۲° ۳۸َ اور ل م = ۹٫۸۲۷۸۔

مثال ۳ — اگر ط پ کو (شکل ۱۷) خارج کرنے پر وہ شَ شَ سے ک پر ملے تو ثابت کرو کہ م = جم پ ک اور مر = شَ ک۔ نیز قائم الزاویہ مثلث شَ پ ک سے ضوابط (۱٬) حاصل کرو۔

(۴۳)

تیسرا باب

زمین کی شکل اور نقشہ کشی

۱۴ — تمہیدیہ —
ہم دیکھتے ہیں کہ سورج چاند اور دیگر اجرام فلکی کی شکلیں گول ہیں، اس سے

اِس امر کا پتہ چلتا ہے کہ زمین کی شکل بھی گول ہونی چاہیے۔ اِس کا ثبوت جو روزمرہ حقایق سے دیا جاتا ہے جغرافیہ کی کتابوں میں ملے گا۔

زمین کی شکل کی صحیح پیمائش علم ہیئت میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے اور یہ باب اِس مضمون کے ابتدائی حصوں کے لیے وقف ہوگا اور اِس کی تشریح کی جائے گی کہ زمین جیسی منحنی سطحیں کس طرح مُستوی سطحوں پر تعبیر کی جا سکتی ہیں جیسا کہ نقشہ کشی میں کیا جاتا ہے۔

یہ واضح کر دینا ضروری ہے کہ جملہ "زمین کی شکل" سے مُراد اِس کی وہ بے قاعدہ اور بے ڈھنگی سطح نہیں ہے جو خشکی اور تری میں منقسم ہے اور جیسے ہم فی الواقعی اُسے دیکھتے ہیں بلکہ اِس جملہ سے وہ سطح مُراد ہے جس کا کچھ حصہ ساکن سمندر سے ظاہر ہوتا ہے اور جو دیگر حصوں میں اُس ہموار سطح پر منطبق خیال کی جا سکتی ہے جس تک پانی اُس مقام پر چڑھتا اگر اُسے نہروں کے ذریعہ سمندر سے آزادانہ آنے دیا جاتا، ہم تصور کر سکتے ہیں کہ ایسی نہریں ایک سمندر سے دوسرے سمندر تک براعظموں کو عبور کر رہی ہیں۔

۱۵ — عرض بلد — (۴۴)

اگر زمین کو ایک کرہ تصور کیا جائے تو زمین کی سطح پر کسی مقام کا عرض بلد اِس مقام کو زمین کے مرکز سے ملانے والے ارضی نصف قطر اور ارضی خط اُستوا کے مُستوی کا درمیانی میلان ہوتا ہے۔ لیکن زمین کی حقیقی شکل کُروی نہیں ہے بلکہ اِس کی شکل قریب قریب اُس گردشی کرہ نمائی ہے جو ایک قطع ناقص کو اِس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔ اِس ناقص کے نیم محوروں کے طول جو کرنل کلارک[1] نے دئے ہیں حسب ذیل ہیں:—

ا = ۲۰۹۲۶۲۰۲ فٹ [۲۰۹۰۶۹۰۴۲]

= (تقریباً) ۳۹۶۳،۳ میل [۳،۵۹۸۰۶]

ا۔ دیکھو "جیوڈیسی" کلارنڈن پریس، ۱۸۸۰ء، صفحہ ۳۱۹۔

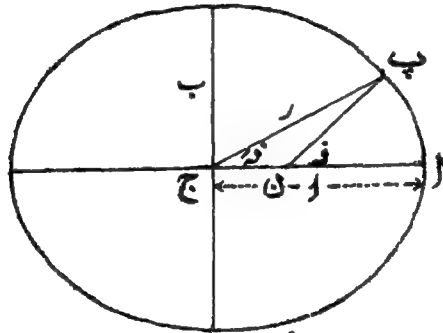
= ۶۳۷۸٫۲ کیلومیٹر [۳٫۸۰۴۷۰]

ب = ۲۰۸۵۴۸۹۵ فٹ [۷٫۳۱۹۲۰۸۰]

= (تقریباً) ۳۹۴۹٫۸ میل [۳٫۵۹۶۵۷]

= ۶۳۵۶٫۵ کیلومیٹر [۳٫۸۰۳۲۲]

خطوط وحدانی کے اندر کے عدد اُن عددوں کے لوگارتم ہیں جو اِن کے ساتھ لگے ہوئے ہیں۔

اگر زمین کی سطح کے کسی نقطہ پ پر کا عماد پ ن (شکل ۱۸) خط استواء کے مُستوی سے ن پر ملے اور ج ن (نیم محور اعظم ہو تو زاویہ پ ن ا (= فہ) پ کا جغرافی عرض بلد ہے اور زاویہ پ ج ا (= فہَ) اِس کا **ارضی مرکزی** (Geocentric) عرض بلد ہے۔

شکل (۱۸)

اگر قطع ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ہو اور پ کے محدد جس کا خارج المرکز زاویہ (Excentric angle) لہ ہے لاَ اور ماَ ہوں تو ہم آسانی کے ساتھ یہ دیکھتے ہیں کہ

مس فہ = ا مس لہ \ ب ، مس فہَ = ب مس لہ \ ا

اور فہ اور فہَ میں ربط ہے مس فہَ = ب² مس فہ \ ا² جس سے (۴۵) ارض مرکزی عرض بلد حاصل ہوتا ہے جبکہ حقیقی یا جغرافی عرض بلد معلوم ہو یا اِس کے برعکس۔

ہم ر کو جو پ کا ارض مرکزی فاصلہ ہے اِس طرح معلوم کرتے ہیں :-

$$\text{ر}^2 = \text{لَ}^2 + \text{مَ}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{لہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{لہ}$$

$$= \frac{\text{ا}^4\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^4\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}$$

$$= \text{ا}^2\,\frac{\text{جم}^2\,\text{فہ} + (1 - \text{ز}^2)^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}{1 - \text{ز}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}} = \text{ا}^2(1 - \text{ز}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ})$$

اگر ز کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کر دی جائیں۔

اُنہی شرطوں کے تحت

$$\text{مس}(\text{فہ} - \text{فہَ}) = \frac{\text{مس فہ} - \text{مس فہَ}}{1 + \text{مس فہ مس فہَ}} = \frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{مس فہ}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2\,\text{مس}^2\,\text{فہ}} = \text{ز}^2\,\text{جب فہ جم فہ}$$

اور اس لیے ہم حسب ذیل نتیجے پر پہنچتے ہیں :-

اگر زمین کے متعلق یہ سمجھا جائے کہ وہ ایک ناقص کو جس کا خروج المرکز ز ہے اِس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے پیدا ہوئی ہے اور اگر زمین کا اُستوائی نصف قطر اکائی کے طور پر لیا جائے تو زمین کی سطح پر جس نقطہ کا جغرافی عرض بلد فہ ہو اس کا تقریبی ارض مرکزی عرض بلد اور سمتی نصف قطر حسب ذیل ہوں گے :-

$$\text{فہَ} = \text{فہ} - \frac{1}{2}\left[\text{ز}^2\,\text{قم}\,1''\,\text{جب}\,2\,\text{فہ}\right]''$$

$$\text{ر} = 1 - \frac{1}{4}\,\text{ز}^2 + \frac{1}{4}\,\text{ز}^2\,\text{جم}\,2\,\text{فہ}$$

ا اور ب کی مندرجۂ بالا کلارک کی قیمتیں استعمال کرنے سے

$$\text{ز}^2 = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)/\text{ا}^2 = 1/147$$

اور اِس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

فہَ = فہ − ۲۰۲ً جب ۲ فہ = فہ − [۔۶۴۸؍۲] جب ۲ فہ ،

ر = ؍۹۹۸۳ + [۷؍۲۳۰۶] جم ۲ فہ

اس لیے جغرافی عرض بلد میں سے ۲۰۲ً جب ۲ فہ تفریق کرنا ہوگا تاکہ ارض مرکزی عرض بلد حاصل ہو۔

اگر تقریب اس سے اعلیٰ تر درجہ تک حاصل کرنا ہو تو حسب ذیل طریقہ پر عمل کیا جا سکتا ہے :۔

$$\text{مس(فہ − فہَ)} = \frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\ \text{مس فہ}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2\ \text{مس}^2\ \text{فہ}} = \frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\ \text{جب ۲ فہ}}{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2) + (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\ \text{جم ۲ فہ}}$$

اس سے آسانی کے ساتھ تقریبی ضابطہ

$$\text{فہ − فہَ} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\ \text{قم ۱ً جب ۲ فہ} - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\right)^2 \text{قم ۱ً جب ۴ فہ}$$

حاصل ہوتا ہے۔

فہَ اور ر کو صحیح طور پر محسوب کرنے کے لیے حسب ذیل طریقہ ہے جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے :۔

ا کو اکائی کے طور پر لینے سے حاصل ہوتا ہے　　(۴۶)

$$\text{ر جم فہَ} = \text{لاَ} = \text{جم لہ} = \text{جم فہ} \Big/ \sqrt{\text{۱} - \text{ز}^2\ \text{جب}^2\ \text{فہ}}$$

$$\text{ر جب فہَ} = \text{اَ} = \text{ب جب لہ} = (\text{۱} - \text{ز}^2)\ \text{جب فہ} \Big/ \sqrt{\text{۱} - \text{ز}^2\ \text{جب}^2\ \text{فہ}}$$

اس لیے اگر ہم رکھیں

$$\text{لا} = \frac{(\text{۱} - \text{ز}^2)}{\sqrt{\text{۱} - \text{ز}^2\ \text{جب}^2\ \text{فہ}}}\ ،\quad \text{ما} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{ز}^2\ \text{جب}^2\ \text{فہ}}}$$

تو حاصل ہوتا ہے۔　ر جب فہَ = لا جب فہ ، ر جم فہَ = ما جم فہ

فہ کے ہر درجہ کے جواب میں مقداروں لا اور ما کی قیمتیں ایفیمرس

میں ملیں گی۔ چونکہ لا اور ما میں جب² فہ ، ز² سے مضروب ہے اس لیے فہ میں ایک چھوٹی خطا واقع ہو تو اس سے لا اور ما پر کوئی قابل قدر اثر نہیں پڑیگا۔ پس لوک لا اور لوک ما بغیر کسی تکلیف دہ بینی اور لج کے صرف جدول دیکھ لینے سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ پھر لوک لا اور لوک ما میں علی الترتیب لوک جب فہ اور لوک جم فہ کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں جمع کرنے سے ہم لوک رجب فہَ اور لوک رجم فہَ معلوم کرتے ہیں اور پھر ر اور فہَ[1] لوک لا اور لوک ما کے درمیان فرق مستقل ہے۔ اِس طریقہ کے اطلاق کی ایک مثال کے طور پر ہم حسب ذیل صورت لے سکتے ہیں:۔

کیمبرج کا جغرافی عرض بلد ۵۲° ۱۲َ ۵۲ً ہے۔ ثابت کرو کہ ارض مرکزی عرض بلد معلوم کرنے میں جو تخفیف استعمال کرنی ہو گی وہ ۔ ۱۱َ ۲۲ً ہے۔ نیز کیمبرج کا فاصلہ زمین کے مرکز سے معلوم کرو اگر زمین کے استوائی نصف قطر کو اکائی کے طور پر لیا جائے۔

ل لا = ۹٫۹۹۷۹۵۹۹　　لوک ما = ۰٫۰۰۰۹۲۴۷

ل جب فہ　۹٫۸۹۷۷۹۷۲　　ل جم فہ　۹٫۷۸۷۲۵۳۴

ل رجب فہَ　۹٫۸۹۵۷۵۷۱　　ل رجم فہَ　۹٫۷۸۸۱۷۸۱

ل رجب فہَ　۹٫۷۸۸۱۷۸۱

مس فہَ　۰٫۱۰۷۵۷۹۰

ل رجب فہَ　۹٫۸۹۵۷۵۷۱　　فہ　۵۲° ۱۲َ ۵۲ً

ل جب فہَ　۹٫۸۹۶۶۸۰۱　　فہَ　۵۲° ۱َ ۳۰ً

ل ر　۹٫۹۹۹۰۷۷۰　　فہَ = فہ ۔ ۱۱َ ۲۲ً

ر = ۰٫۹۹۷۸۸

[1] اِس عرض بلد اور لوک ر کی تخفیف کا حساب لگانے میں مدد دینے کے لیے ای۔ جی۔ اسٹون نے ایک جدول "Monthly Notices" R.A.S. vol. xliii میں دی ہے۔

ل ر بلاشبہ رجم فہَ سے بھی معلوم ہو سکتا تھا لیکن رجب فہَ > رجم فہَ اور ہم نے اِن دو مقداروں میں سے بڑی مقدار کو استعمال کرنے میں قاعدہ (صفحہ ۱۰) کی پابندی کی ہے۔

(۴۷) **مثال ۱۔** زمین کی شکل کے لیے کلارک کے عناصر (ا اور ب کی قیمتیں) استعمال کر کے ثابت کرو کہ

مس فہَ = [۹،۹۹۷۰۲۵۲] مس فہ

جہاں خطوط وحدانی کے اندر کے عدد سے ایک جدولی لوگارتم تعبیر ہوتا ہے۔ نیز اگر یہ معلوم ہو کہ گرینچ کا جغرافی عرض بلد ۵۱° ۲۸َ ۳۸ً ہے تو ثابت کرو کہ اس کا ارض مرکزی عرض بلد ۵۱° ۱۷َ ۱۱ً ہے۔

مثال ۲۔ اگر ز کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کر دی جائیں تو ثابت کرو کہ

لا = ۱ ـ ۳/۴ ز^۲ ـ ۱/۴ ز^۲ جم ۲ فہ ،

ما = ۱ + ۱/۴ ز^۲ ـ ۱/۴ ز^۲ جم ۲ فہ

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ل لا اور ل ما کی جدولیں اعشاریہ کے پانچ مقامات کی حد تک مساواتوں

ل لا = ۹،۹۹۸۸۸ ـ ۴۰۰۰۷ ، ۰ جم ۲ فہ ،

ل ما = ۰،۰۰۰۷۴ ـ ۴۰۰۰۷ ، ۰ جم ۲ فہ

سے محسوب کر کے تیار کی جا سکتی ہیں۔

۱۶ ـ نصف النہار پر نصف قطر انحناء۔

زمین کا انحناء نصف النہار کے کسی نقطہ پر، اُس لمثی دائرہ کے انحناء کے مساوی ہوتا ہے جو ناقص کے اِس نقطہ پر کھینچا گیا ہو۔ اگر اِس قطع ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ پر کسی نقطہ کے محدد ا جم طہ، ب جب طہ

ہوں تو اِس نقطہ پر کے عماد کی مساوات ہے

لا ا جب طہ ۔ ب ما جم طہ = (ا۲ ۔ ب۲) جب طہ جم طہ (۱)

اور عرض بلد فہ یا وہ زاویہ جو یہ عماد محور اعظم ۔ کے ساتھ بناتا ہے مساوات

مس فہ = ا مس طہ \ ب

سے معلوم ہوتا ہے ۔

مرکز انحناء دو متصلہ عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے ۔ اس لیے (۱) کو طہ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز انحناء کے محددوں کو مساوات

لا ا جم طہ + ب ما جب طہ = (ا۲ ۔ ب۲) جم ۲ طہ (۲)

پوری کرنی چاہیئے ۔

اب (۱) اور (۲) کو لا اور ما کے لیے حل کیا جائے تو مرکز انحناء کے حسب ذیل محدد حاصل ہوتے ہیں

لا = (ا۲ ۔ ب۲) جم۳ طہ \ ا ، ما = (ب۲ ۔ ا۲) جب۳ طہ \ ب

اور اس لیے نصف قطر انحناء

ر = (ا۲ جب۲ طہ + ب۲ جم۲ طہ)^(۳/۲) \ ا ب

یا فہ کی رقوم میں

ر = ا۲ ب۲ (ب۲ جب۲ فہ + ا۲ جم۲ فہ)^(-۳/۲)

ہے ۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ہی نصف النہار پر دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ س ہو اور ان کے جغرافی عرض بلد نیم قطری زاویوں میں علی الترتیب فہ اور فہ۱ ہوں تو (۴۸)

س = ∫ (از و تا فہ۱) ا۲ ب۲ / (ب۲ جب۲ فہ + ا۲ جم۲ فہ)^(۳/۲) د فہ

اِس سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر خروج المرکز کی دوسرے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جائیں تو عرض بلدوں فہ اور فہ$_۱$ کو ملانے والی قوس کی تقریبی قیمت یہ ہے

$$\text{س} = (۱ - \tfrac{۱}{۲}\,\text{ج})\,(\text{فہ}_۱ - \text{فہ}) - \tfrac{۳}{۲}\,\text{ج جب}\,(\text{فہ}_۱ - \text{فہ})\,\text{جم}\,(\text{فہ}_۱ + \text{فہ})$$

جہاں ج = (ا − ب)، مقدار $\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ کو بالعموم **ناقصیت** **(Ellipticity)** کہا جاتا ہے۔

نیز عرض بلد فہ پر نصف النہار کے نصف قطر انحناء کے لیے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$۱ - \tfrac{۱}{۲}\,\text{ج} - \tfrac{۳}{۲}\,\text{ج جم ۲ فہ}$$

اور نصف النہار کے ربع کا تقریبی طول $\pi\,(۱ + \text{ب})\,\backslash\,۴$ ہے۔

مثال ۱۔ اگر عرض بلدوں ۶۰° اور ۴۵° پر نصف النہاروں کے ایک درجہ کے طول علی الترتیب س$_۱$ اور س$_۲$ ہوں تو ثابت کرو کہ زمین کی ناقصیت اگر زمین کو ایک گردشی کرہ نما سمجھا گیا ہو $\frac{۴}{۳}(۱ - \text{س}_۲ \backslash \text{س}_۱)$ ہے۔

عرض بلد فہ پر نصف النہار کے نصف قطر انحناء کا طول $۱ - \tfrac{۱}{۲}\,\text{ج} - \tfrac{۳}{۲}\,\text{ج جم ۲ فہ}$ ہے۔ اِس لیے عرض بلد فہ پر ۱° کا طول

$$(۱ - \tfrac{۱}{۲}\,\text{ج} - \tfrac{۳}{۲}\,\text{ج جم ۲ فہ})\;۲\pi \backslash ۳۶۰$$

ہے، اِس لئے

$$\text{س}_۱ = (۱ + \tfrac{۱}{۴}\,\text{ج})\;۲\pi \backslash ۳۶۰$$

$$\text{س}_۲ = (۱ - \tfrac{۱}{۲}\,\text{ج})\;۲\pi \backslash ۳۶۰$$

اس لیے

$$\frac{\text{س}_۲}{\text{س}_۱} = ۱ - \frac{۳\,\text{ج}}{۴\,\text{ا}}$$

مثال ۲۔ اگر ز کی چوتھی قوتوں تک رقمیں لی جائیں تو ثابت کرو کہ جغرافی عرض بلد فہ کے کسی نقطہ پر نصف النہار کے نصف قطر انحناء کے لیے جملہ ہے

$$\text{ک} = \text{و}\left(۱ - \tfrac{۱}{۴}\,\text{ز}^۲ - \tfrac{۳}{۶۴}\,\text{ز}^۴ - (\tfrac{۳}{۴}\,\text{ز}^۲ + \tfrac{۳}{۱۶}\,\text{ز}^۴)\,\text{جم ۲ فہ} + \tfrac{۱۵}{۶۴}\,\text{ز}^۴\,\text{جم ۴ فہ}\right)$$

مثال ۳ — زمین کو گردشی کرہ نما سمجھ کر اور اس کے نیم محوروں کو کلارک کے ستقلوں کے مساوی لیکر ثابت کرو کہ قطب سے خط استوا تک کھینچے ہوئے نصف النہار کے ربع میں میٹروں کی تعداد ۱۰۰۰۱۸۶ ہے۔ (لوگ میٹر فٹوں میں = ۰۵۱۵۹۸۸۹)

مثال ۴ — کلارک کی جیوڈیسی (Geodesy) صفحہ ۱۱۲ میں یہ لکھا ہے "ارضیاتی اعمال حساب میں یہ رواج ہے کہ کسی نصف النہار پر پیمائش کردہ فاصلہ کو جبکہ یہ فاصلہ ایک درجہ سے متجاوز نہ ہوتا ہو عرض بلد کے فرق میں اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ اس طول کو اُس نصف قطر انحنا سے تقسیم کرتے ہیں جو وسطی نقطہ کے یا زیادہ صحیح طور پر حدودی (سروں پر کے) عرض بلدوں کے اوسط کے متناظر حاصل ہوتا ہے"

اگر فہ + $\frac{1}{2}$ عہ اور فہ − $\frac{1}{2}$ عہ انتہائی عرض بلد ہوں تو ثابت کرو کہ اس مفروضہ کو اختیار کرنے سے تقریباً $\frac{1}{4}$ (ا − ب) جب³ عہ جم ۲ فہ کی خطا ہو گی۔ (۴۹)

کیونکہ قوس س = (ا − $\frac{1}{2}$ ج) عہ − $\frac{3}{2}$ ج جب عہ جم ۲ فہ جیسا کہ قبل ازیں دکھایا جا چکا ہے، لیکن مفروضہ قوس (ا − $\frac{1}{2}$ ج) عہ − $\frac{3}{2}$ ج عہ جم ۲ فہ ہے۔ اس لیے ان کا فرق ہے

$\frac{3}{2}$ ج جم ۲ فہ (عہ − جب عہ) = $\frac{1}{4}$ ج جب³ عہ جم ۲ فہ

کیونکہ عہ چھوٹا ہے۔ یہ فرق انچوں میں تقریباً

۰۰۰۲۱۴ جب³ عہ جم ۲ فہ

ہے جو تقریباً نصف انچ ہوگا اگر فہ = °۶۰ اور عہ = ۱۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ عرض بلد فہ سے عرض بلد فہ + ۱′ تک نصف النہار پر چلنے سے فٹوں کی تعداد جو عبور کرنی ہوگی وہ

۶۰۷۷ − ۳۱ جم ۲ فہ

ہے۔

مثال ۶ — اگر عرض بلد فہ کے توازی کا نصف قطر لا میل ہو اور اس توازی کا ارتفاع خط استوا کے اوپر ما میل ہو تو کلارک کے مفروضات

تسلیم کر کے ثابت کرو کہ

لا = ۷۱۶۶۶ ۳۹ جم فہ – ۳۴ ۴۱ جم ۳ فہ '

ما = ۴۴۱ ۶۶ ۳۹ جب فہ – ۴۱ ۳۴ جب ۳ فہ

نیز ثابت کرو کہ اگر عرض بلد فہ پر نصف النہار کا نصف قطر انحناء ر ہو تو

ر = ۶۶۱ ۵ ۹ ۳ – ۲۰۶۲ ۲۱ جم ۲ فہ

مثال ۷ — کلارک کے مستقلوں سے ثابت کرو کہ عرض بلد فہ پر نصف النہار کے ایک درجہ کا طول فٹوں میں

۶۰۹ ۳۶۴ – ۱۸۶۷ جم ۲ فہ + ۴ جم ۴ فہ

سے تعبیر ہوتا ہے جہاں فہ، قوس کے وسطی نقطہ کا عرض بلد ہے۔ نیز ثابت کرو کہ طول بلد کے ایک درجہ کا طول

۳۶۵۵۴۳ جم فہ – ۳۱۲ جم ۳ فہ

ہے۔

۱۷ — نقشہ کشی کا نظریہ —

یہاں لفظ نقشہ سے مراد کرہ پر کے نقطوں یا شکلوں کی کوئی مستوی تعبیر ہے۔ سب سے پہلے اُن طریقوں پر غور کرنا چاہئے جن کے ذریعہ کرہ پر کے ایک نقطہ کے جواب میں نقشہ پر اس کا متناظر نقطہ مقرر ہو سکے۔ ہمیں یا تو ہندسی عمل معلوم کرنا چاہئے جس کے ذریعہ نقشہ پر کا ہر نقطہ کرہ پر کے اُس نقطہ سے متعلق ہو جائے جسے وہ تعبیر کرتا ہے، یا دو ضابطے معلوم ہونے چاہئیں جن سے یہ دریافت ہو سکے کہ اگر کرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد دئے جائیں تو نقشہ پر متناظر نقطہ کے قائم محدد کیا ہیں۔ یہ دونوں طریقے استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہم ثانی الذکر سے ابتدا کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک اساسی بڑے دائرہ کے حوالہ سے کرہ پر کے کسی نقطہ کے عرض بلد اور طول بلد علی الترتیب ب، لہ ہیں۔ فرض کرو کہ دو علی القوائم محوروں کے لحاظ سے ایک مستوی میں متناظر نقطہ کے محدد لا، ما ہیں۔

(۵۰) اگر بہ اور لہ دئے گئے ہوں تو سوال کو حل کرنے کے لیے ضروری ہے کہ لا اور ما کے لیے جملے حاصل ہو سکیں۔ اِس کے عکس مسئلہ پر بھی غور کرنا ہے یعنی اگر لا اور ما دئے گئے ہوں تو بہ اور لہ معلوم کرنے کے لیے کوئی جملے ہونے چاہئیں۔ اِن امور سے

لا = $ف_1$ (بہ ، لہ) ، ما = $ف_2$ (بہ ، لہ)

جیسے رشتوں کے وجود کا اظہار ہوتا ہے جہاں $ف_1$ اور $ف_2$ معلومہ تفاعل ہیں۔ یہ شاید نقشہ کشی کے فن کا عام ترین تخیل ہے۔

بہرحال تفاعلوں $ف_1$ اور $ف_2$ پر بہت سے قیود عائد کرنے ہوں گے تاکہ وہ عملی مقاصد پورے ہو سکیں جن کے لیے نقشے تیار کئے جاتے ہیں۔ مثلاً برطانیہ عظمیٰ کا کوئی نقشہ اُسی وقت مفید ہوگا جبکہ اِس پر مختلف قطعات کی وضع قطع حتی الامکان وہی ہو جو زمین کی کروی سطح پر اِن قطعات کی واقعی ہے۔ نیز نقشہ پر دکھائے ہوئے مختلف شہروں کے باہمی فاصلے، کم از کم تقریبی طور پر، اُن حقیقی فاصلوں کے متناسب ہونے چاہئیں جو زمین کی سطح پر بڑے دائرہ کی قوس میں ناپے گئے ہوں۔ ہم اعتراف کرتے ہیں کہ متذکرہ بالا شرطیں کسی حال میں بھی ٹھیک ٹھیک پوری نہیں ہو سکتیں۔ یہ ممکن نہیں ہے کہ کوئی ایسا مستوی نقشہ تیار کیا جا سکے کہ کرہ پر کے نقطوں کے ہر زوج کے درمیانی فاصلے اپنے حقیقی تناسبوں میں اِس نقشہ پر تعبیر ہو سکیں۔ لیکن بلاشبہ مختلف طریقوں سے یہ ممکن ہے کہ ایک ایسی مطابقت پیدا کی جائے کہ ہر کروی شکل جس کا ہر بعد کرہ کے قطر کے مقابلہ میں چھوٹا ہو نقشہ پر ایک شکل کے ذریعہ جو بڑی حد تک مشابہ ہو تعبیر ہو سکے۔

اگر کسی کروی مثلث کو نقشہ میں ایک مستوی مثلث کے ذریعہ تعبیر کرنا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ اِن کے متناظر زاوئے مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ کروی مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ $180°$ سے بڑا ہوتا ہے اور اسلیے اِس کے زاوئے کسی مستوی مثلث کے زاوئے نہیں ہو سکتے۔ لیکن اگر کروی مثلث بمقابلہ کرہ کی کل سطح کے چھوٹا ہو تو کروی اضافہ (ا + ب + ج − $180°$)

چھوٹا ہوگا اور اگر اسے نظر انداز کیا جا سکے تو ہم مختلف طریقوں سے تفاعل ف، اور ف، معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے کرہ پر کا ہر چھوٹا کروی مثلث اُس مثلث کے متشابہ ہوگا جو مستوی میں اس کو تعبیر کرتا ہے۔

وہ نقشہ جس میں مذکورۂ بالا خاصیت پائی جائے کروی سطح کی ہم شکل تعبیر (Conformal Representation) کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ نقشہ پر کے نقطے اَ، بَ، جَ کرہ پر کے نقطوں ا، ب، ج کو تعبیر کرتے ہیں اور مان لو کہ یہ نقطے متصل ہیں۔ اگر نقشہ ہم شکل ہے تو

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{اَ بَ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{بَ جَ}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{جَ اَ}} \qquad (۵۱)$$

اور جب تک کہ کرہ پر کے متصل نقطوں کے لئے یہ رشتے عام طور پر درست نہ ہوں نقشہ ہم شکل نہیں ہوگا۔

۱۸ ۔ نقشہ کے ہم شکل ہونے کی شرطیں

وہ عام شرطیں کہ نقشہ ہم شکل ہو اس طرح معلوم کیجاتی ہیں:-

فرض کرو کہ کرہ پر تین متصل نقطے ا، ب، ج ہیں اور ا کے محدد ہ، لہ، ب کے محدد ہ + ھ، لہ + ک، اور ج کے محدد ہ + ھَ، لہ + کَ ہیں جہاں ھ، ک، ھَ، کَ چھوٹی مقداریں ہیں۔ اب بموجب دفعہ ۸

$$\text{ا ب}^2 = \text{ا}^2(\text{ھ}^2 + \text{ک}^2\ \text{جم}^2\ \text{ہ})،\quad \text{ب ج}^2 = \text{ا}^2[(\text{ھ} - \text{ھَ})^2 + (\text{ک} - \text{کَ})^2\ \text{جم}^2\ \text{ہ}]،$$

$$\text{ج ا}^2 = \text{ا}^2(\text{ھَ}^2 + \text{کَ}^2\ \text{جم}^2\ \text{ہ})$$

جہاں ا، کرہ کا نصف قطر ہے۔

اگر ا، ب، ج کے جواب میں مستوی نقشہ پر نقطے اَ، بَ، جَ ہوں اور اگر اَ کے محدد لا، ما ہوں تو بَ کے محدد

$$\text{لا}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\text{ھ}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}\text{ک}\text{ ، ما}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\text{ھ}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\text{ک}$$

اور جَ کے محدد

$$\text{لا}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\text{ھَ}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}\text{کَ}\text{ ، ما}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\text{ھَ}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\text{کَ}$$

ہیں - اگر مثلثات ا ب ج اور اَ بَ جَ مشابہ ہوں اور ھا ایک مشترک جزو ضربی ہو جو ھ ، ک ، ھَ ، کَ پر منحصر نہ ہو تو

$$\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\text{ھ}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}\text{ک}\right)^2+\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\text{ھ}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\text{ک}\right)^2=\text{ھا}^2\text{ا}^2\left(\text{ھ}^2+\text{ک}^2\text{جم}^2\text{بہ}\right)$$

$$\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\text{ھَ}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}\text{کَ}\right)^2+\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\text{ھَ}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\text{کَ}\right)^2=\text{ھا}^2\text{ا}^2\left(\text{ھَ}^2+\text{کَ}^2\text{جم}^2\text{بہ}\right)$$

$$\left\{\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}(\text{ھ}-\text{ھَ})+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}(\text{ک}-\text{کَ})\right\}^2+\left\{\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}(\text{ھ}-\text{ھَ})+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}(\text{ک}-\text{کَ})\right\}^2=\text{ھا}^2\text{ا}^2\left\{(\text{ھ}-\text{ھَ})^2+(\text{ک}-\text{کَ})^2\text{جم}^2\text{بہ}\right\}$$

................(۱)

یہ مساواتیں ، ھ ، ک ، ھَ ، کَ کی تمام قیمتوں کے لیے پوری ہوں گی اگر حسب ذیل مساواتیں پوری ہوں

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\times\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\times\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}=0\text{ ، }......(۲)$$

$$\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}\right)^2+\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\right)^2=\text{جم}^2\text{بہ}\left\{\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\right)^2+\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\right)^2\right\}\text{ ، }...(۳)$$

(۵۲)

اگر تعبیہ ہم شکل ہے تو لا اور ما کو یہ شرطیں پوری کرنی چاہئیں جبکہ ان کو بہ اور لہ کی رقوم میں بیان کیا گیا ہو۔

جب کوئی ہم شکل نقشہ تیار ہو جاتا ہے تو دوسرے متعدد نقشے حسب ذیل طریقہ پر حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ملتف متغیر لا + خ ما ، غ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں خ حسب معمول -۱ کا جذر المربع ہے ۔ اگر ہم غ کا کوئی تفاعل لیں مثلاً غ^{۲} یا جب غ یا لوک مس غ وغیرہ یا زیادہ عام صورت میں ف (غ) تو ہمیں ایک دوسرا ملتف متغیر حاصل ہوتا ہے جسکو اِس طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے :

$$\text{ف}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{ع} + \text{خ و}$$

اور نیز

$$\text{ف}(\text{لا} - \text{خ ما}) = \text{ع} - \text{خ و}$$

اِن دونوں مساواتوں کو ہ اور لہ کے لحاظ سے تفرق کریں تو

$$\text{ف}'(\text{لا}+\text{خ ما})\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \text{خ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}}\right) = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ہ}} + \text{خ}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ہ}}$$

$$\text{ف}'(\text{لا}+\text{خ ما})\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}} + \text{خ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\right) = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لہ}} + \text{خ}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لہ}}$$

$$\text{ف}'(\text{لا}-\text{خ ما})\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} - \text{خ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}}\right) = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ہ}} - \text{خ}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ہ}} ،$$

$$\text{ف}'(\text{لا}-\text{خ ما})\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}} - \text{خ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\right) = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لہ}} - \text{خ}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لہ}}$$

پہلی اور چوتھی مساواتوں کو ضرب دیکر اِس میں دوسری اور تیسری کا حاصل ضرب جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}'(\text{لا}+\text{خ ما})\,\text{ف}'(\text{لا}-\text{خ ما})\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\right)$$

$$= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ہ}} \times \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لہ}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ہ}} \times \frac{\text{جف و}}{\text{جف لہ}}$$

چونکہ (لا ، ما) ہم شکل تعبیر ہے اِس لیے شرط (۲) کی بنا پر دائیں طرف کا جملہ صفر ہے۔ پس بائیں طرف کا جملہ بھی صفر ہونا چاہیئے ۔

پھر دوسری اور آخری مساواتوں کو ضرب دینے سے

$$\text{ف}'(\text{لا}+\text{خ ما})\,\text{ف}'(\text{لا}-\text{خ ما})\left[\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}}\right)^{۲}\right]$$

$$= \left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لہ}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لہ}}\right)^{۲}$$

اور پہلی اور تیسری مساواتوں کو ضرب دینے سے

$$\text{ف}'(\text{لا} + \text{خ ما})\,\text{ف}'(\text{لا} - \text{خ ما})\left[\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\right)^{۲}\right]$$

$$= \left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف بہ}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف بہ}}\right)^{۲}$$

اِس لیے (۳) سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لہ}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لہ}}\right)^{۲} = \text{جم}^{۲}\,\text{بہ}\left\{\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف بہ}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف بہ}}\right)^{۲}\right\}$$

اس طرح حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے :-

(۵۳) اگر بہ، لہ کے کوئی تفاعل لا، ما ہوں جن سے کرہ کی سطح کی ہم شکل تعبیر ایک مستوی پر حاصل ہوتی ہے تو محدد ع، و بھی جن کی تعریف شکل

$$\text{ف}(\text{لا} \pm \text{خ ما}) = \text{ع} \pm \text{خ و}$$

کی کسی مساوات سے ہوئی ہو بہ، لہ کے ساتھ ہم شکل تناظر میں ہوں گے۔

مثال۔ اگر کرہ پر کے نقطوں کی ہم شکل تعبیر کے لیے لا اور ما نمونہ لا = ع جم لہ، ما = ع جب لہ کے تفاعل ہوں جہاں ع، بہ کا ایک تفاعل ہے تو ہم شکل تعبیر کے لیے جو عام شرطیں اوپر بیان کی گئی ہیں ان سے ثابت کرو کہ

$$\text{ع} = \text{لو مس}\left(\frac{\pi}{۴} \pm \frac{\text{بہ}}{۲}\right)$$

لا اور ما کی بجائے اِن کے جملے درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۲) متماثلاً پوری ہوتی ہے اور مساوات (۳) تحویل ہو کر

$$\text{ع}^{۲} = \text{جم}^{۲}\,\text{بہ}\left(\frac{\text{جب ع}}{\text{جف بہ}}\right)^{۲}$$

ہو جاتی ہے۔

۱۹* — ہم شکل تعبیر میں پیمانہ —

ھ کی ہندسی اہمیت (دفعہ ۱۸) قابل یادداشت ہے۔ اِس کو زیر بحث ظِل کا پیمانہ کہتے ہیں کیونکہ مساواتوں (۱) میں سے پہلی مساوات سے جس میں ھ کو اور لا و ما شامل کیا گیا ہے یہ ظاہر ہے کہ ھ وہ جزو ضربی ہے جسے کرہ پر کی کسی چھوٹی قوس پر لگانا ہوگا تاکہ ظِل پر متناظر قوس کا طول حاصل ہو۔ ھ کو پیمانہ خیال کرنے کے لیے ہم (چونکہ ظِل ہم شکل ہے) کرہ پر نقطہ کے قریب کسی چھوٹی قوس کا مقابلہ ظِل پر کی متناظر قوس کے ساتھ کر سکتے ہیں۔ ہم سادہ ترین صورت کے طور پر طول ھ کی ایک چھوٹی قوس لینگے جو نقطوں (بہ، لہ) اور (بہ + ھ، لہ) کے درمیان ہے۔ تب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ھ}^{2}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\right)^{2}+\text{ھ}^{2}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\right)^{2}=\text{ھ}^{2}\,\text{ا}^{2}\,\text{ھ}^{2}$$

اِس سے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :-

اگر ایک نقطہ کے قائم مستوی محدد لا، ما ہوں جو کسی ہم شکل نقشہ میں نصف قطر ا کے کرہ پر کے نقطہ بہ، لہ کو تعبیر کرتا ہے تو وہ پیمانہ یا جزو ضربی

$$\frac{1}{\text{ا}}\left\{\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ہے جسے کرہ پر کی ہر چھوٹی قوس پر لگانا ہوگا تاکہ اِس سے ظِل میں متناظر چھوٹا خط حاصل ہو۔

(۵۴)

۲۰ — مرکیٹر (Mercator) کا ظِل —

اب ہم کرہ کی اُس تعبیر پر غور کریں گے جو "مرکیٹر کے ظِل" کے نام سے مشہور ہے اور جو جہاز رانی میں بہت مفید ہے۔ اِس ظِل کی اہم خصوصیتیں

یہ ہیں:—

(۱) نقشہ پر کے کسی نقطہ کا فصلہ، کرہ پر کے متناظر نقطہ کے طول بلد کے راست متناسب ہوتا ہے۔

(۲) نقشہ پر کے کسی نقطہ کا معین، کرہ پر کے متناظر نقطہ کے عرض بلد کا ایک تفاعل ہوتا ہے (لیکن طول بلد کا تفاعل نہیں ہوتا)۔

(۳) نقشہ کرہ کی ہم شکل تعبیر ہوتا ہے۔

پہلی شرط لا = ھَ لہ سے بیان ہوتی ہے۔ دوسری شرط کو ظاہر کرنے کے لیے ہم ما = ف (بہ) رکھتے ہیں اور تیسری شرط کو پورا کرنے کے لیے ف کو ایک ایسا جملہ ہونا چاہیے کہ تعبیر ہم شکل ہو۔ اگر ما کو بہ کے صرف متناسب لیا جائے تو ظل ہم شکل نہیں ہوگا۔

دفعہ (۱۸) کی بنیادی شرطیں (۲) اور (۳) پوری ہونی چاہئیں۔ چنانچہ

جف لا / جف بہ = ۰ ، جف لا / جف لہ = ھَ ، جف ما / جف بہ = فَ (بہ) ، جف ما / جف لہ = ۰

ان قیمتوں کو درج کرنے سے دفعہ (۱۸) کی مساوات (۲) متماثلاً صفر ہوتی ہے اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے

ھَ^۲ = جم^۲ بہ [فَ (بہ)]^۲

اور اس لیے فرف (بہ) / فر بہ = ± ھَ قط بہ

اگر ہم چاہیں کہ ما کی مثبت سمت، کرہ پر شمالی سمت کے جواب میں ہو تو اوپر کی علامت (یعنے +) لینی چاہیے۔ پس

ف (بہ) = ھَ لوگ_و مس (π/۴ + بہ/۲) + مستقل

اس مستقل کو صفر کے مساوی بنایا جا سکتا ہے کیونکہ اس صورت میں نقشہ پر

خط استواء کے نقطوں کے لیے مُعیّن صفر ہو جاتے ہیں۔ اس طرح وہ اساسی مسئلہ معلوم ہو جاتا ہے جس پر مرکیٹر کے ظِلّ کا انحصار ہے، اِس مسئلہ کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے :۔

اگر کُرہ پر کسی نقطہ کے طول بلد اور عرض بلد لہ، ہ ہوں تو قائم محددوں

$$\text{لا} = \text{ﮨَ}\ \text{لہ}،\quad \text{ما} = \text{ﮨَ}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{ہ}}{۲}\right)$$

سے ایک نقشہ بنایا جا سکتا ہے جو کُرہ کے ساتھ ہم شکل ہوگا۔

یہاں لہ کو نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے اور مستعملہ لوکارتم نپیری ہے۔ لیکن سہولت اِس میں ہوگی کہ اوپر کی مساواتوں کو اِس طور پر تحویل کیا جائے کہ لہ حسب معمول طول بلد کے درجوں میں بیان ہو جائے اور لوکارتم عام لوکارتموں میں مقیاس ۴۳۴۳ء۰ کی مدد سے تبدیل ہو جائیں۔ اِن تبدیلیوں کو عمل میں لانے سے (۵۵)

$$\text{لا} = \frac{۲\pi\ \text{ﮨَ}}{۳۶۰}\ \text{لہ}،\quad \text{مَا} = \frac{\text{ﮨَ}}{۰.۴۳۴۳}\ \text{لوک}_{۱۰}\ \text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{ہ}}{۲}\right)$$

اب ﮨَ کی بجائے ایک نیا مستقل ﮨ ایسا رکھو کہ ۳۶۰ ﮨ = ۲π ﮨَ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ﮨ}\ \text{لہ}،\quad \text{ما} = ۱۳۲\ \text{ﮨ}\ \text{لوک}_{۱۰}\ \text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{ہ}}{۲}\right) \quad ....(۱)$$

جہاں لہ درجوں میں ہے اور معمولی لوکارتم استعمال کئے گئے ہیں۔

مثال ۱ — ثابت کرو کہ مرکیٹر کے ظِلّ

$$\text{لا} = \text{ﮨَ}\ \text{لہ}،\quad \text{ما} = \text{ﮨَ}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{ہ}}{۲}\right)$$

میں پیمانہ ﮨَ قط ہ \ ا سے بیان ہوتا ہے۔

مثال ۲ — اگر بحر اوقیانوس کے مرکیٹری نقشہ میں شمالی عرض بلد

۷۰° کا توازی خط استوا سے ۱۸۵ ملی میٹر پر ہو تو ۲۰° کے توازی کا فاصلہ کیا ہونا چاہیئے اور خط استوا پر ۵۰° کا طول کیا ہوگا۔

۱۸۵ = ۱۳۲ ھ لوک ب۱۰ مس (π/۴ + ۳۵°)

اس لیے　ھ = ۱٫۸۶ اور نقشہ کی مساوات ہے

ما = ۲۴۵ ملی میٹر × لوک ب۱۰ مس (π/۴ + ب/۲)

اِس میں ب = ۲۰° رکھنے سے ما = ۳۸ ملی میٹر حاصل ہوتا ہے۔
پھر چونکہ لا = ۱٫۸۶ الہ اِس لیے سوال کے دوسرے حصہ کا جواب

۱٫۸۶ × ۵۰ = ۹۳ ملی میٹر

ہے۔

مثال ۳ — مرکیٹری نقشہ میں

ما = ھَ لوک مس (π/۴ + ب/۲)

کی بجائے　ما = ھَ لوک مس (π/۴ − ب/۲)

لینے سے کیا فرق پڑ جائے گا۔

مثال ۴ — اگر عرض بلد ب پر چھوٹی ارضی قوس س ہو اور اگر اِس کا مرکیٹری ظِل سَ ہو تو ثابت کرو کہ ب میں سے گذرتے ہوئے عرض بلد کے ارضی دائرہ کے طول اور ظِل کے خط استواء کے طول میں نسبت س\سَ ہے۔

مثال ۵ — مرکیٹری ظِل میں ثابت کرو کہ بحری (Nautical) میل (جو مساوی ہے ۱' عرض بلد) کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے عرض بلد کا قاطع (قط)۔

مثال ۶ — ساحلی جہاز رانی میں مرکیٹری نقشوں کا عملی فائدہ یہ ہے کہ ملاح جب یہ معلوم کرنا چاہتا ہے کہ دو نقطوں ا اور ب میں کتنے بحری میل (قوس کے منٹوں) کا فصل ہے تو وہ اپنے گنیوں کے سروں کو نقشہ کے

اُن نقطوں پر رکھتا ہے جو ا اور ب کے متناظر ہیں اور پھر اُسے اٹھا کر ا اور ب کے عرض بلد کے قریب اُسی نقشہ کے حاشیہ پر عرض بلد کے لیے جو درجہ بندی ہے (۵۶) اُس پر منطبق کر کے مطلوبہ فصل معلوم کر لیتا ہے۔ اُس کے اِس طریق پیمائش کا جواز ثابت کرو۔

نقشہ چونکہ ہم شکل ہے اور کرہ کے صرف ایک چھوٹے حصہ کو تعبیر کرتا ہے اِس لیے ہم اُسے اِس طور پر استعمال کر سکتے ہیں کہ گویا نقشہ پر کا ہر فاصلہ (بشمول عرض بلدوں کے پیمانہ کے) کرہ پر کے متناظر فاصلہ کے ٹھیک متناسب ہے۔ لیکن زمین کے مختلف حصوں کو تعبیر کرنے والے نقشوں پر عرض بلد کے منٹ طول میں بالعموم مختلف ہوں گے اگرچہ یہ نقشے ایک ہی مرکیٹری ظل کے مختلف حصے ہوں۔ اِس لیے ملاح کو چاہیئے کہ وہ اپنا فاصلہ متعلقہ نقشہ سے اور تقریباً اُسی عرض بلد سے محسوب کرے جو اُن نقطوں کا ہے جن کا فاصلہ وہ پیمائش کر رہا ہے۔

مثال ۷ — ثابت کرو کہ مرکیٹری نقشہ پر کیمبرج (عرض بلد ۵۲° ۱۲′ ۵۲″) کے گرد عرض بلد کے ایک درجہ کا طول اُس طول کا ۱.۶۲ گنا ہے جو خط استوا پر طول بلد کے ایک درجہ کا ہے۔

ضابطہ (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر خط استوا پر طول بلد کے ایک درجہ کا طول ھ ہو تو عرض بلدوں ب۱ اور ب۲ کے توازیوں کا درمیانی فاصلہ مرکیٹری نقشہ پر یہ ہے

$$۱۳۲\,\text{ھ}\left(\text{لوک}_{۱۰}\,\text{مس}\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\text{ب}_{۱}}{۲}\right)-\text{لوک}_{۱۰}\,\text{مس}\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\text{ب}_{۲}}{۲}\right)\right)$$

اب ب۱ کی بجائے ۵۲° ۱۲′ ۵۲″ اور ب۲ کی بجائے ۵۱° ۱۲′ ۵۲″ رکھنے سے یہ جملہ ہو جاتا ہے ۱.۶۲ ھ۔

مثال ۸ — ثابت کرو کہ مرکیٹری نقشہ پر کسی بڑے دائرہ کی ترسیم کی مساوات ہمیشہ شکل

$$۲\,\text{جب}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}+\text{ج}\right)=\text{ک}\left(\text{و}^{\text{ا}}\text{و}-\text{قو}^{\text{ا}}\text{ر}\right)$$

کی ہوگی جہاں ۲ π ا ، نقشہ پر اُستوائی محیط کا طول ہے اور ج ، ک وہ مستقل ہیں جن سے اس بڑے دائرہ کی تعیین ہوتی ہے۔

مثال ۹ — اگر بہ اتنا چھوٹا ہو کہ مس^۵ ۱/۲ بہ کو نظر انداز کیا جا سکے تو ثابت کرو کہ مرکیٹری نقشہ پر اور اُس نقشہ پر (جو زمین کے مرکز سے اُس لفاف اُسطوانہ پر ظل لینے سے حاصل کیا گیا ہے جو زمین کو خط اُستواء کے پورے طول پر مس کرتا ہے) خط استواء سے ایک مقام کے فاصلوں کا فرق جس کا عرض بلد بہ ہے حسب ذیل ہوگا

۲/۳ مس^۳ ۱/۲ بہ × زمین کا قطر

اُسطوانہ پر کرہ کی سطح کے کسی نقطہ کا ظل لینے سے حاصل ہوتا ہے

لا = ۲ π ا لہ \ ۳۶۰ ، ما = ا مس بہ

جہاں بہ اور لہ علی الترتیب اِس نقطہ کے عرض بلد اور طول بلد ہیں اور ا ، کرہ کا نصف قطر ہے۔

مرکیٹری ظل میں

لا = ۲ π ا لہ \ ۳۶۰ ، ما = ا لوک مس (۴۵ + ۱/۲ بہ)

اِس لیے ان دو صورتوں میں خط استواء سے فاصلوں کا فرق ہے

ا (مس بہ ـ لوک (۱ + مس ۱/۲ بہ) / (۱ ـ مس ۱/۲ بہ))

= ا (۲ مس ۱/۲ بہ + ۲ مس^۳ ۱/۲ ...... ـ ۲ مس ۱/۲ بہ ـ ۲/۳ مس^۳ ۱/۲ بہ)

= ۲/۳ مس^۳ ۱/۲ بہ × ۲ ا

(۵۷) ۲۱* — مساوی المیلان (Loxodrome) -

اگر ہم زمین کو کرہ تسلیم کریں اور فرض کریں کہ ایک جہاز ہمیشہ ایک ہی سمت میں چلتا ہے یعنے ہمیشہ نصف النہار کے ساتھ ایک ہی زاویہ بناتا ہے

تو اس کے راستہ کو ہم مساوی المیلان (Loxodrome) کہینگے۔ انگریزی میں اس کا دوسرا نام (Rhumb-line) بھی ہے۔

اگر طول بلد لہ اور عرض بلد بہ ہو اور اگر طہ وہ زاویہ ہو جس پر یہ منحنی خط متواتر نصف النہاروں کو قطع کرتا ہے تو مساوی المیلان کی تفرقی مساوات ہوگی

مس طہ = جم بہ فرلہ \ فربہ

اس لیے (تکمل سے) لہ = مس طہ لوکو (π/۴ + بہ/۲) + مستقل

اگر ہم لہ کی اس قیمت کو مرکیٹری ظِل

لا = ھَ لہ ، ما = ھَ لوکو مس (π/۴ + بہ/۲)

میں درج کریں تو حاصل ہوتا ہے

لا = ما مس طہ = مستقل

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مساوی المیلان کا مرکیٹری ظِل ایک خط مستقیم ہے جو نصف النہاروں کے ظِلوں کو اسی زاویہ پر قطع کرتا ہے جس پر مساوی المیلان کرہ کی سطح پر نصف النہاروں کو قطع کرتا ہے۔

مساوی المیلان کے مرکیٹری ظِل کی یہ خاصیت جہازرانی میں بہت زیادہ اہمیت رکھتی ہے کیونکہ جب ملاح مرکیٹری نقشہ پر کے دو نقطوں کو ایک خط مستقیم سے ملاتا ہے تو وہ مستقل زاویہ جس پر یہ خط، نصف النہاروں کے ظِلوں کو قطع کرتا ہے اس سمت کا اظہار کرتا ہے جس میں اسے ایک مقام سے دوسرے مقام تک جانا ہوگا۔

مثال ۱ ــ اگر ر، کسی کرہ کا نصف قطر ہو اور طہ وہ مستقل زاویہ ہو جس پر مساوی المیلان نصف النہاروں کو قطع کرتا ہے اور اگر + ی وہ محور ہو جو مرکز کو شمالی قطب سے ملاتا ہے اور محاور + لا اور + ما وہ نصف قطر ہوں جو خطِ استوا پر کے ان نقطوں سے کھینچے گئے ہیں جن کے طول بلد علی الترتیب

۰° اور ۹۰° ہیں تو ثابت کرو کہ مساوی المیلان کی مساواتیں ہیں

ر مس طہ فری + ما فرلا − لا فرما = ۰ ،

لا² + ما² + ی² = ر²

مثال ۲ — اگر کرہ کا نصف قطر ر ہو اور طہ وہ مستقل زاویہ ہو جس پر نصف النہار مساوی المیلان کو قطع کرتے ہیں اور اگر مساوی المیلان کی اس قوس کا طول س ہو جس کے سروں کے عرض بلد ب۱ ، ب۲ ہیں تو ثابت کرو کہ

ر (ب۱ − ب۲) = س جم طہ

مثال ۳ — اگر زمین کو ایک کرہ نما سمجھا جائے جو چھوٹے خروج المرکز ز کے ایک قطع ناقص کو اس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے بنا ہے تو ثابت کرو کہ کسی نقطہ کے طول بلد لہ اور عرض بلد بہ میں رشتہ جبکہ یہ نقطہ اس مساوی المیلان پر واقع ہو جو نصف النہاروں کو مستقل زاویہ طہ پر قطع کرتا ہے حسب ذیل ہے

لہ = مس طہ {لوک مس (π/۴ + بہ/۲) − ز² جب بہ} + مستقل

اگر قطع ناقص میں اس نقطہ کا نصف قطر انحنا م ہو اور قطع ناقص اور محور اصغر کے درمیان عماد پر مقطوعہ مَ ہو تو (۵۸)

مَ = ا / √(۱ − ز² جب² بہ) ، م = (مَ³ / ا²) (۱ − ز²)

اور مساوی المیلان کی تفرقی مساوات ہے

فرلہ / فربہ = م مس طہ / (مَ جم بہ) = مس طہ / جم بہ − ز² مس طہ جم طہ تقریباً

مثال ۴ — ثابت کرو کہ مرکیٹری نقشہ پر جس میں طول کی اکائی استوائی طول بلد کا آلیکٹی ہے عرض بلد بہ کے توازی کا تعین

۷۹۱۶ لوک مس (π/۴ + بہ/۲) − ۳۴۳۸ لہ² جب بہ

ہوگا جہاں ز اُس قطع ناقص کا خروج المرکز ہے جو زمین کی نصف النہاری تراش لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۴ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ظِل کا نقطہ لا، ما جو نقطہ لہ، بہ کے جواب میں ہے حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ھ}\ \text{لہ}$$

$$\text{ما} = \text{ھ}\left\{\text{لوک}_{\text{و}}\ \text{مس}\left(\frac{\text{ط}}{۴}+\frac{\text{بہ}}{۲}\right) - \text{ز}^{۲}\ \text{جب بہ}\right\}$$

چونکہ لہ، دائری ناپ میں ہے اس لیے ھ = ۳۴۳۸ اور ۳۴۳۸ \ ۰٫۴۳۴۳ = ۷۹۱۶ رکھنے سے لا، منٹوں میں حاصل ہوتا ہے۔

۲۲ — تسطیحی اظلال۔

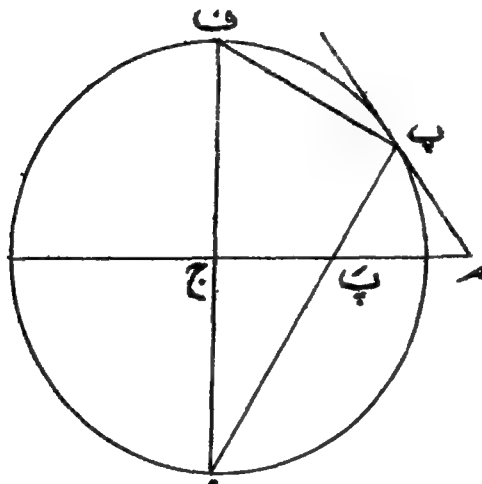
کرہ پر کے نقطوں کو ہم شکل ظِل کے ذریعہ تعبیر کرنے کے اہم ترین طریقوں میں سے ایک طریقہ وہ ہے جو تسطیحی اظلال کے طور پر مشہور ہے۔ اس کی تفصیل حسب ذیل ہے۔

کرہ پر کوئی نقطہ و، ظِل کے مبدا کے طور پر منتخب کیا جاتا ہے، اب ظِل کا مستوی اس بڑے دائرہ کا مستوی یا اس کے متوازی کوئی مستوی لیا جاتا ہے جس کا قطب و ہو۔ اگر کرہ پر کوئی دوسرا نقطہ پ ہو اور وپ، ظِل کے مستوی کو پؔ میں قطع کرے تو ہم کہینگے کہ پ کا تسطیحی ظِل پؔ ہے۔

مستوی و پؔ پ ج کھینچو جہاں ج کرہ کا مرکز ہے۔ پ پر کا مماس مستوی، ظِل کے مستوی کو ایک خط میں قطع کریگا جو م میں سے گذرتا ہے اور کاغذ کی سطح پر عمود ہے۔ فرض کرو کہ اس خط پر کوئی نقطہ مؔ ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ایسے ظِل سے ہم شکل تعبیر حاصل ہوتی ہے ہم پ میں سے گذرنے والی کوئی قوس لیتے ہیں اور نصف النہار کے ساتھ اس کا جو میلان ہے اس پر اور ظِل میں اسکے متناظر جو زاویہ ہے اس پر غور کرتے ہیں۔

دائرہ کی خاصیتوں سے م پ = م پؔ اور اسلیے مؔ پ = مؔ پؔ

پس مثلثات م' پ م اور م' پ' م مساوی ہیں اور اس لیے زاویہ
م' پ م = زاویہ م' پ' م — لیکن زاویہ م' پ م، کرہ پر کے (۵۹)
دو دائروں کا زاویہ تقاطع ہے اور زاویہ م' پ' م، اِن کے ظلّوں کا زاویہ
تقاطع ہے۔ اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

تسطیحی ظل کے ہم شکل ہونے کا سادہ ترین ثبوت شاید یہ ہے: پ' پر کے کسی خطی عنصر (Line-element) اور پ پر کے متناظر خطی عنصر میں نسبت $\frac{\text{و پ'}}{\text{و پ}}$ ہے، اِس کو متشابہ مثلثوں کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے۔ اب یہ واقعہ کہ یہ نسبت خطی عنصر کی سمت پر منحصر نہیں ہے ثابت کرتا ہے کہ یہ تعبیر ہم شکل ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ پیمانہ $\frac{\text{و پ}}{\text{و پ'}}$ ہے۔

شکل (۱۹)

یہ ثابت کرنا آگاہی بخش ہوگا کہ تسطیحی ظل مرکیٹری ظل سے کس طرح دفعہ ۱۸ کے اصول کے ذریعہ ماخوذ کیا جا سکتا ہے یعنے اگر ع + خ و = ف (لا + خ ما) تو

محددوں ع ، و سے ایک ایسی تعبیر ملتی ہے جو لا ، ما سے حاصل ہونے والی تعبیر کے ہم شکل ہے۔

مرکیٹری ظِل میں

لا = ھ لہ ، ما = ھ لوک مس (ٹ/۴ + بہ/۲)

اس لیے خ (لا + خ ما)/ھ = لوک مس (ٹ/۴ − بہ/۲) + خ لہ

اور اس لیے و و^(خ(لا + خ ما)/ھ) = ا مس (ٹ/۴ − بہ/۲) جم لہ + خ ا مس (ٹ/۴ − بہ/۲) جب لہ

(٦٠) دائیں جانب کا رکن ، لا + خ ما کا ایک تفاعل ہے اور اس لیے دفعہ ۱۸ کی رُو سے

ع = ا مس (ٹ/۴ − بہ/۲) جم لہ اور و = ا مس (ٹ/۴ − بہ/۲) جب لہ

بھی ایک ہم شکل تعبیر کے محدد ہیں ، اور یہ دکھانا آسان ہے کہ یہ محدد تسطیحی ظِل کے ہیں کیونکہ اگر خط استوا کے مستوی کو ظِل کا مستوی لیا جائے تو شکل ۱۹ میں

زاویہ ف و پ ، (ٹ/۴ − بہ/۲) ہے اور

ج پَ = ج و مس (ٹ/۴ − بہ/۲)

اگر پ کا طول بلد لہ ہو تو ج پَ کے ظِل ، صفر طول بلد کی سمت میں اور اسکے علی القوائم سمت میں ، علی الترتیب حسب ذیل ہیں

ج و مس (ٹ/۴ − بہ/۲) جم لہ ، اور ج و مس (ٹ/۴ − بہ/۲) جب لہ

ہم دفعہ ۱۹ کے ضابطوں سے کرہ پر کے نقطہ بہ ، لہ پر تسطیحی ظِل

کا پیمانہ متعین کر سکتے ہیں جبکہ ظِل کی تعریف مساواتوں

$$\text{لا} = \text{ا جم له مس}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\text{به}}{2}\right),\quad \text{ما} = \text{ا جب له مس}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\text{به}}{2}\right)$$

کے ذریعہ کی گئی ہو جس میں بنیادی دائرہ کا ضد شطب راس کے طور پر لیا گیا ہے (یعنے ظِل کے مبداء کے طور پر) اور ا، کرہ کا نصف قطر ہے۔ پس

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف به}} = \frac{\text{ا جم له}}{-1-\text{جب به}},\quad \frac{\text{جف ما}}{\text{جف به}} = \frac{\text{ا جب له}}{-1-\text{جب به}}$$

اور اسلیے

$$\frac{1}{\text{ا}}\left\{\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف به}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف به}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\text{جب به}}$$

مثال ۱۔ کرہ پر کے نقطہ به، له پر پیمانہ کی قیمت تسطیحی ظِل کے لیے معلوم کرو جبکہ بنیادی دائرہ کے اوپر راس نقطہ له = ۱۸۰، به = ۰ پر ہو اور ظِل کی تعریف مساواتوں

$$\text{لا} = \frac{\text{ا جم به جب له}}{1+\text{جم به جم له}},\quad \text{ما} = \frac{\text{ا جب به}}{1+\text{جم به جم له}}$$

کے ذریعہ کی گئی۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ زمین کے تسطیحی ظِل میں زمین کے کسی نقطہ اور اس کے تحت قدمی نقطہ کے متناظر نقطے نقشہ کے مرکز کے ساتھ ہم خط ہونگے اور ایسے ہونگے کہ نقشہ کے مرکز سے ان کے فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

مثال ۳۔ فرض کرو کہ کرہ پر کے نقطہ به، له کے جواب میں تسطیحی ظِل کا نقطہ لا + مف لا، ما + مف ما ہے۔ ثابت کرو کہ مف لا، مف ما، مف له، مف به چھوٹے ہوں تو (۶۱)

$$\text{مف لا} = -\text{ما مف له} - \text{لا قط به مف به}$$

$$\text{مف ما} = \text{لا مف له} - \text{ما قط به مف به}$$

مثال ۴۔ دُنیا کے نقشہ کو تین حصوں میں بنانا مقصود ہے

جن میں سے دو حائط قطبی ہوں تسطیحی ظل پر اور ایک، استوائی ہو مرکیٹری ظل پر۔
حائط قطبی نقشے ایسے ہونے چاہئیں کہ عرض بلد میں پیمانہ وہی ہو جو دوسرے
مرکیٹری نقشہ میں خط استوا پر ہے، نیز حدودی عرض بلد فہ پر پیمانہ تینوں نقشوں
کے لیے ایک ہی ہو۔ ثابت کرو کہ

۲ مس فہ (۱ + جب عہ) = جب عہ (۲ + جب عہ)

اور یہ کہ عرض بلد فہ میں پیمانہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ خط استوا پر کے
پیمانہ کو

۱ + جب² عہ ⁄ ۲ (۱ + جب عہ)

سے ضرب دیا جائے۔

ان پیمانوں سے جو دفعہ ۲۰ مثال ۱ اور دفعہ ۲۲ میں مرکیٹری اور تسطیحی
ظلوں کے لیے ثابت کئے گئے ہیں ہمیں علی الترتیب حاصل ہوتا ہے

ھ\(۱ + جب عہ) = ھَ\ا ، ھ\(۱ + جب فہ) = ھَ قط فہ\ا

اِن دو مساواتوں سے ھَ ⁄ ا ھ کو ساقط کرنے سے

مس فہ + √(۱ + مس² فہ) = ۱ + جب عہ

اس مساوات کو فہ کے لیے حل کرو تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

عرض بلد فہ پر کے پیمانہ کو خط استوا پر کے پیمانہ سے جو نسبت ہے
وہ قط فہ ہے اور

قط فہ + √(قط² فہ − ۱) = ۱ + جب عہ

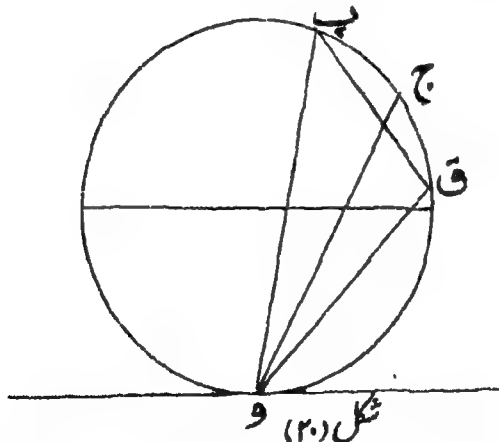
کو حل کرنے سے قط فہ مثال میں مندرجۂ شرط کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

۲۳۔ کرہ پر کے کسی دائرہ کا تسطیحی ظل بھی ایک دائرہ ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کرہ پر دائرہ کا مرکز ج ہے۔ ظل کے مبداء، کرہ کے مرکز

اور ج میں سے گذرتا ہوا ایک مستوی کھینچو۔

فرض کرو کہ اِس مستوی اور دائرہ کے مستوی کا خطِ تقاطع پ ق ہے۔ وہ مخروط جس کی چوٹی و ہے اور جو دائرہ کے محیط کے سب نقطوں میں سے گذرتا ہے ضرور ہے کہ اس کا محور و ج ہو کیونکہ ج پ = ج ق اور اس لیے زاویہ ج و پ = زاویہ ج و ق۔ یہ ہر اُس مستوی کے لیے درست ہونا چاہیئے جو و ج میں سے گذرتا ہے اور یہ صرف اُسی صورت میں ممکن ہے جبکہ و ج مخروط کا محور ہو۔

ہر مخروط دائری تراش کے دو مستوی رکھتا ہے جو محور کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں اور جنکا خطِ تقاطع محور پر عمود وار ہوتا ہے۔ ج اور و پر کرہ کے مماس مستوی، ج و کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں اور انکا خطِ تقاطع، ج و پر عمود ہے۔ لیکن ج پر کا مماس مستوی ایک دائری تراش پ ق کے متوازی ہے اور اِس لیے و پر کا مماس مستوی دوسری دائری تراش کے متوازی ہونا چاہیئے۔ اِس طرح تسطیحی ظل کی بنیادی خاصیت ثابت ہو جاتی ہے۔ (۶۲)

شکل (۲۰)

چونکہ ایک مخروط، دائری تراشوں کے صرف دو نظامات رکھتا ہے اِس لیے سوائے اُن مستویوں کے جو و پر کے مماس کے متوازی ہوں

کوئی دوسرے مستوی نہیں ہو سکتے جو تسطیحی ظل کی امتیازی خصوصیات رکھتے ہوں۔

یہ مسئلہ حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔

کرہ کو دئیے ہوئے دائرہ کے محیط پر مس کرنے والے مخروط کا ہر مکون دائرہ کے اُس مماس پر عمود ہے جو نقطہ تماس پر کھینچا گیا ہو۔ نقطہ تماس پر مکون کے چھوٹے حصوں کے متعلق یہ تصور کیا جا سکتا ہے کہ وہ کرہ پر واقع ہیں۔ ظل میں یہ مخروط ایک نقطہ میں سے گذرنے والے خطوط مستقیم کی ایک پنسل بنجاتا ہے اور چونکہ ظل میں زاوئیے وہی رہتے ہیں اس لیے دائرہ کا ظل ایک ایسا منحنی ہونا چاہئیے جو ان تمام خطوط مستقیم کو علی القوائم قطع کرے یعنی دوسرا دائرہ۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ تسطیحی ظل میں کرہ پر کے کسی دائرہ کے مرکز کا ظل متناظر دائرہ کا مرکز ہوتا ہے اگر اصلی دائرہ کے قطر اتنے چھوٹے ہوں کہ انہیں خطوط مستقیم تصور کیا جاسکے۔

چونکہ زاوئیے ظل میں بھی وہی رہتے ہیں اس لیے اصلی دائرہ میں بنایا ہوا کوئی قائم الزاویہ مثلث ظل میں بھی قائم الزاویہ مثلث رہتا ہے اور اس لیے دائرہ کے ہر قطر کا ظل متناظر دائرہ کا ایک قطر ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ کو ظل کا مبدا قرار دیکر کرہ کا تسطیحی ظل لیا جائے تو نصف النہاروں کے کسی نظام کا ظل ہم محور دائروں کا ایک نظام ہوگا۔

(۶۳) مثال ۳۔ ثابت کرو کہ تسطیحی ظل میں کرہ پر کے ہم مرکز چھوٹے دائروں کے نظام کا ظل دائروں کا ایک نظام ہوتا ہے جن کے مرکز ہم خط ہوتے ہیں اور ان میں سے ہر دائرہ ہم محور دائروں کے وہی نظام کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

کیونکہ ہم مرکز دائروں کے مرکز ج میں سے گذرنے والے تمام بڑے دائروں کی تقلیب ہم محور دائروں کے ایک نظام میں ہوتی ہے اور چونکہ تقلیب میں زاوئیے برقرار رہتے ہیں اسلیے ہم مرکز دائروں کے مقلوب ان ہم محور دائروں کو

علی القوائم قطع کرنے چاہئیں اور اِن کے مرکز اُس خط پر واقع ہونے چاہئیں جو بڑے دائرہ و ج کا مقلوب ہے جہاں و ظِل کا مرکز ہے۔

۲۴ - تسطیحی ظِل کے لیے عام ضابطے -

فرض کرو کہ تسطیحی ظِل کے مبدا ر و کے محدد ۲۷۰°، بہ ہیں اور فرض کرو کہ کسی دوسرے نقطہ پ کے محدد لہ، بہ ہیں جہاں اِن دونوں نقطوں کے محدد ایک ہی درجہ دار بڑے دائرہ سَس کے حوالے سے ہیں۔

فرض کرو کہ سَ وہ بڑا درجہ دار دائرہ ہے جس کا قطب و ہے۔

فرض کرو کہ خط مستقیم و پ، سَ کے مستوی کو پَ میں قطع کرتا ہے۔ اِس طرح پ کا تسطیحی ظِل پَ ہے اور ہم مان لیتے ہیں کہ مستوی سَ میں پَ کے محدد لا، ما ہیں۔ محور + لا کرہ کا وہ نصف قطر ہے جو کرہ کے مرکز سے، س پر سَ کے صعودی عقدہ تک کھینچا گیا ہے۔ محور + ما، سَ پر کے نقطہ ۹۰° میں سے گذرتا ہے، اور یہ مان لیا گیا ہے کہ یہ عقدہ، سَ اور س دونوں پر درجہ بندی کا مبدا ہے۔

اب ہمیں بہ، لہ کی رقوم میں لا اور ما کے لیے جملے معلوم کرنا ہے۔
ہم اب کرہ کے مرکز سے حسب ذیل تین قائم محور مان لیتے ہیں:-

محور + لا، نقطہ بہ = ۰، لہ = ۰ تک
محور + ما، نقطہ بہ = ۰، لہ = ۹۰ تک
محور + ی، نقطہ بہ = ۹۰°، لہ غیر متعین ہے

اِن محوروں کے حوالے سے و، پَ، پ کے محدد علی الترتیب حسب ذیل ہیں:-

	لا	ما	ی
و	۰	- اجم بہ	اجب بہ
پَ	لا	ماجب بہ	ماجم بہ
پ	اجم بہ جم لہ	اجم بہ جب لہ	اجب بہ

اب چونکہ و، پ' اور پ ہم خط ہیں اِس لیے

$$\frac{\text{ا جم بہ. جم لہ − لا}}{\text{جم بہ جم لہ}} = \frac{\text{ا جم بہ جب لہ − ما جب بہ.}}{\text{جم بہ جب لہ + جم بہ.}} = \frac{\text{ا جب بہ − ما جم بہ.}}{\text{جب بہ − جب بہ.}}$$

اِن مساواتوں کو لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$\text{لا} = \text{ا} \; \frac{\text{جم بہ جم لہ}}{\text{ا − جب بہ جب بہ. + جم بہ جم بہ. جب لہ}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{ما} = \text{ا} \; \frac{\text{جب بہ جم بہ. + جم بہ جب بہ. جب لہ}}{\text{ا − جب بہ جب بہ. + جم بہ جم بہ. جب لہ}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۶۴)

اگر و، س کا شطب ہو تو بہ. = ۹۰° اور اِس لیے

$$\text{لا} = \text{ا} \; \frac{\text{جم بہ جم لہ}}{\text{ا − جب بہ}} \;،\quad \text{ما} = \text{ا} \; \frac{\text{جم بہ جب لہ}}{\text{ا − جب بہ}}$$

اگر و، س کا ضد شطب ہو تو بہ. = −۹۰° اور اس لیے

$$\text{لا} = \text{ا} \; \frac{\text{جم بہ جم لہ}}{\text{ا + جب بہ}} \;،\quad \text{ما} = -\text{ا} \; \frac{\text{جم بہ جب لہ}}{\text{ا + جب بہ}}$$

اگر و، س پر واقع ہو تو بہ. = ۰ اور اس لیے

$$\text{لا} = \text{ا} \; \frac{\text{جم بہ جم لہ}}{\text{ا + جم بہ جب لہ}} \;،$$

$$\text{ما} = \text{ا} \; \frac{\text{جب بہ}}{\text{ا + جم بہ جب لہ}}$$

اِن ضابطوں میں ہم نے یہ مان لیا ہے کہ س پر درجہ بندی کا صفر س، پر سَ کے صعودی عقدہ کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔ اگر درجہ بندی کا صفر کہیں اور ہو تو فرض کرو کہ اِس صعودی عقدہ کا طول بلد طا ہے۔ تب ضابطوں (۱) اور (۲) میں لہ کی بجائے لہ − طا رکھنا چاہئے اور اِس لیے

$$\text{لا} = \text{ا} \; \frac{\text{جم بہ جم (لہ − طا)}}{\text{ا − جب بہ جب بہ. + جم بہ جم بہ. جب (لہ − طا)}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{ما} = ا \frac{\text{جب بہ جم بہ. + جم بہ جب بہ. جب (لہ - طا)}}{\text{ا - جب بہ جب بہ. + جم بہ جم بہ. جب (لہ - طا)}} \ldots\ldots (۴)$$

ضابطوں (۱) اور (۲) یا (۳) اور (۴) کے ذریعہ ہم لا اور ما کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ لہ اور بہ دیئے گئے ہوں اور اس طرح قائم محددوں کے ذریعہ کرہ پر کی کسی شکل کا تسطیحی نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ اگر تسطیحی ظل بنیادی دائرہ کے قطب سے ہو اور محور + لا، نقطہ لہ = ۰، بہ = ۰ سے کرہ کے مرکز تک اور محور + ما، نقطہ لہ = ۹۰°، بہ = ۰ سے کرہ کے مرکز تک ہو تو لا، ما، اور لہ، بہ کے درمیان رشتے

$$\text{لا} = \text{ا جم لہ مس} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{بہ}}{2} \right)، \quad \text{ما} = \text{ا جب} \left(\text{مس} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{بہ}}{2} \right) \right)$$

ہیں۔

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ اگر تسطیحی ظل بنیادی دائرہ کے ضد قطب سے ہو اور محور + لا، مرکز سے نقطہ لہ = ۰، بہ = ۰ تک اور محور + ما، مرکز سے نقطہ لہ = ۹۰°، بہ = ۰ تک ہو تو لا، ما اور لہ، بہ کے درمیان رشتے

$$\text{لا} = \text{ا جم لہ مس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right)، \quad \text{ما} = -\text{ا جب لہ مس} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\text{بہ}}{2} \right)$$

ہیں۔

مثال ۳ ۔ اگر ظل کا مبدا، گرینوچ پر ہو اور زمین کو کروی مان لیا جائے تو بتاؤ کہ ضابطوں (۳) اور (۴) کے ذریعہ کس طرح آسٹریلیا کا تسطیحی نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔

(۶۵) بہ کی بجائے گرینوچ کا عرض بلد درج کرو اور یہ مان کر کہ طول بلد لہ گرینوچ سے پیمائش کئے گئے ہیں طا = ۹۰° رکھو۔ اب اگر آسٹریلیا کے ساحل پر کسی نقطہ کے طول بلد اور عرض بلد لہ اور بہ ہوں تو (۳) اور (۴) سے متناظر مستوی قائم محدد لا اور ما متعین ہو جائیں گے اگر مستقل ا کو ایسی قیمت دی گئی ہو جو نقشہ کے مطلوبہ عرض و طول کے لحاظ سے سہولت بخش ہو۔

مثال ۴ ۔ اگر لہ، بہ متغیر محدد سمجھے جائیں لیکن اس رشتہ کے

تحت کہ

ا جم لہ جم بہ + ب جب لہ جم بہ + ج جب بہ = ۰

جہاں ا ، ب ، ج مستقل ہیں تو (۳) اور (۴) سے ثابت کرو کہ وہ سب نقطے جو لا ، ما سے تعبیر ہوتے ہیں ایک ہی دائرہ کے محیط پر واقع ہوں گے۔

۲۵ — ایسا نقشہ بنانا جس میں کرہ پر کا ہر رقبہ نقشہ پر مساوی رقبہ کے ذریعہ تعبیر ہو۔

اگر ایسے نقشہ پر تین نقطے (لا ، ما)، (لاَ ، ماَ)، (لاً ، ماً) ہوں تو وہ رقبہ جو ان کے اندر آتا ہے یہ ہے

½ { لا (ماً − ماَ) + لاَ (ما − ماً) + لاً (ماَ − ما) } ..... (۱)

فرض کرو کہ کرہ پر متناظر نقطے (بہ ، لہ)، (بہ + ک ، لہ) اور (بہ ، لہ + ھ) ہیں جہاں ک اور ھ چھوٹی مقداریں ہیں۔ وہ رقبہ جو ان نقطوں سے کرہ پر حاصل ہوتا ہے ½ ا² ھ ک جم بہ ہے

نیز محددوں لاَ ، ماَ کے لیے جملے

لا + (جف لا / جف بہ) ک ، ما + (جف ما / جف بہ) ک

اور محددوں لاً ، ماً کے لیے جملے

لا + (جف لا / جف لہ) ھ ، ما + (جف ما / جف لہ) ھ

حاصل ہوتے ہیں۔

پس (۱) میں انہیں درج کرنے سے مستوی میں رقبہ کے لیے حاصل ہوتا ہے

½ { لا ((جف ما / جف لہ) ھ − ک (جف ما / جف بہ)) − (لا + (جف لا / جف بہ) ک) ھ (جف ما / جف لہ) + (لا + (جف لا / جف لہ) ھ) ک (جف ما / جف بہ) }

= ½ ھ ک ((جف لا / جف لہ) × (جف ما / جف بہ) − (جف لا / جف بہ) × (جف ما / جف لہ))

[illegible] لیے یہ دو جملے جو حاصل ہوتے ہیں انہیں مساوی رکھنے اور [illegible] تمام مطلعیں ایسے ہی چھوٹے رقبوں سے حاصل کی جا سکتی ہیں [illegible] پہنچتے ہیں کہ

اگر ایسے کرہ کا مستوی ظِل ایسا ہو کہ کرہ پر کے نقطہ لہ، بہ کے متناظر نقاط کے محدد لا اور ما، شرط

$$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} - \frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}} = \text{اجم بہ} \quad \text{....} (۲)$$

کو پورا کریں تو کرہ پر کا کوئی رقبہ مساوی رقبہ میں مستوی پر مُظِلّل ہوگا۔

(۶۶)

تیسرے باب پر متفرق مثالیں

مثال ۱۔ اگر ایک کرہ پر کے نقطوں کو کرہ کے مرکز سے ایک مستوی پر منظّل کیا جائے (Gnomonic Projection) تو دفعہ ۱۸ کے اصولوں کے ذریعہ اس امر کا امتحان کرو کہ آیا یہ ظل ہم شکل ہے۔

مثال ۲۔ اگر کرہ کے ایک بڑے دائرہ پر موقوعہ کسی نقطہ کا طول بلد اور عرض بلد (ل، فہ) ہوں تو ثابت کرو کہ

مس فہ = ا جم ل + ب جب ل

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔ پھر اگر ہم رکھیں

(۱) لا = مم فہ جم ل، ما = مم فہ جب ل

یا (۲) لا = مس فہ قطل، ما = مس ل

تو لا اور ما میں (یا لا اور ما میں) ایک خطی رشتہ حاصل ہوتا ہے اسلیے لا اور ما (یا لا اور ما) کو کارٹیزی محددوں کے طور پر مرتسم کیا جائے تو تمام بڑے دائرے خطوط مستقیم ہوں گے۔

بتاؤ کہ کرہ کا منظری ظل مستوی پر لینے سے یہ دو نقشے کس طرح تیار کئے جاسکتے ہیں

مثال ۳۔ زمین کی سطح پر ایک دائرہ کا زاویٰ نصف قطر ر ہے اور اس کا مرکز ا عرض بلد یہ میں واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر شمالی قطب کو ظل کا مبدا لیکر خط استواء کے مستوی پر زمین کا تسطیحی ظل حاصل کیا جائے تو اس ظل میں مذکورہ بالا دائرہ ایک دائرہ (نصف قطر ر) سے تعبیر ہوگا جس کے مرکز کا فاصلہ اُس نقطہ سے جو ا کو تعبیر کرتا ہے حسب ذیل ہوگا

$$ر \text{ مس } \frac{ر}{۲} \text{ مس } \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{یہ}{۲} \right)$$

مثال ۴۔ کرہ کے اُس ظل میں جو گاؤس سے منسوب ہے نصف النہار

ایک نقطہ ﻭ میں سے گذرنے والے خطوط مستقیم سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ایسے کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ ﮬ لہ ہے جہاں لہ، متناظر نصف النہاروں کے طول بلدوں کا فرق ہے۔ عرض بلد کے توازی دائری قوسوں سے تعبیر ہوتے ہیں جن کے مرکز ﻭ پر ہیں۔ اگر یہ تعبیر ہم شکل ہو تو ثابت کرو کہ اس قوس کا نصف قطر جو عرض التمام ع کے جواب میں ہے ک (مس ۱/۲ ع)ﮬ ہونا چاہئے جہاں ک مستقل ہے۔

ہمیں حاصل ہونا چاہئے لا = ع جم (لالہ)، ما = ع جب (ﮬ لا) جہاں ع، عرض بلد کا ایک تفاعل ہے۔ دفعہ ۱۸ کی مساوات (۳) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ﮬ۲ ع۲ = جم۲ بہ (جف ع / جف بہ)

مثال ۵ — اگر

لا = ﮬ (ﭖ/۲ − لہ)، ما = ﮬ لوک مس (ﭖ/۴ + بہ/۲)

تو ثابت کرو کہ

مس (لا + خ ما)/ﮬ۲ = ع + خ و

جہاں ع = جم بہ جم لہ \ (۱ + جم بہ جب لہ)، و = جب بہ \ (۱ + جم بہ جب لہ)

اور اس لیے بتاؤ کہ ع، و ایسے محدد ہیں کہ ان سے ایک ہم شکل تعبیر حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۶ — اگر کرہ پر کا نقطہ بہ، لہ ایک مستوی پر کے اس نقطہ سے تعبیر ہو جس کے محدد

لا = جم بہ جم لہ / (۱ + جم بہ جب لہ)، ما = جب بہ / (۱ + جم بہ جب لہ)

(۶۷)

ہیں تو ثابت کرو کہ کرہ پر کا ایک دائرہ جس کا نصف قطر ں ہے اور مرکز بہ، لہ ہے مستوی پر ایک دائرہ سے تعبیر ہوگا جس کا نصف قطر جب ں / (جم ں + جم بہ جب لہ) ہوگا اور جس کے مرکز کے محدد جم بہ جم لہ \ (جم ں + جم بہ جب لہ) اور جب بہ \ (جم ں

+ جم بہ جب لہ) ہونگے۔

مساوات جم ر = جب بہ جب بہ + جم بہ جم بہ جم (لہ - لہ) کی مدد سے

بہ اور لہ کو ساقط کرو۔

مثال ۷۔ شمالی نصف کرہ کا ایک نقشہ اس طرح بنایا گیا ہے کہ عرض بلد کے توازی ہم مرکز دائرے ہیں اور نصف النہار ان دائروں کے نصف قطر ہیں اور یہ کہ زمین پر کے مساوی رقبے نقشہ پر مساوی رقبوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اس منحنی کی مساوات معلوم کرو اور اسے مرتسم کرو جو نقشہ پہ ایک مساوی المیلان کو تعبیر کرتا ہے۔

سوال کی شرطوں سے حاصل ہوتا ہے

لا = ر جم لہ، ما = ر جب لہ

جہاں ر، بہ کا تفاعل ہے۔

چونکہ رقبے وہی رہتے ہیں اسلئے ہم ان قیمتوں کو دفعہ ۲۵ میں مندرجہ شرط میں درج کرتے ہیں اور معلوم کرتے ہیں کہ

$$ر \frac{\text{جف } ر}{\text{جف } بہ} = - ص \text{ جم } بہ$$

جہاں ص ایک مستقل ہے جو کرہ پر کے اور ظل پر کے رقبوں کی نسبت کے متعلق مربوط ہے۔

تکمل کرنے اور اختیاری مستقل کو اس شرط سے معلوم کرنے سے کہ ر = ۰ جبکہ بہ = ۹۰° ہمیں حاصل ہوتا ہے

ر^۲ = ۲ ص (۱ - جب بہ)

اور اس لیے ر = ۲ √ص جب $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{بہ}{2}\right)$

اس مساوی المیلان خط کا ظل جو نصف النہاروں کو زاویہ صہ (دفعہ ۲۱) پہ قطع کرتا ہے حسب ذیل مساوات ہوں

لہ = مس صہ لوگ و مس $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{بہ}{2}\right)$

$$\text{مس له} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}\ ,$$

$$\sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}} = ۲\sqrt{\text{ھ}}\ \text{جب}\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\text{ب}}{۲}\right)$$

کے درمیان به اور له کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور یہ حاصل اسقاط قطبی محددوں میں

$$\text{ر}^{۲}\left(۱ + \text{قو}^{۲}\ \text{طم}\ \text{صه}\right) = ۴\ \text{ھ}^{۲}$$

ہے۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ عرض بلد کے توازی پر سفر کرنے کی بجائے ایک بڑے دائرہ پر سفر کرنے سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ جس کی بچت کی جاسکتی ہے یہ ہے

$$\text{ا}\left[۲\ \text{جب}^{-۱}\frac{۲}{\pi} + \sqrt{\pi^{۲} - ۴} - \pi\right]$$

جہاں ا′ زمین کا نصف قطر ہے۔

(۶۸) یہ واضح ہے کہ مفروضہ صورت میں آمد و رفت کے بندرگاہوں کے طول بلدوں کے درمیان فرق ۱۸۰° ہونا چاہیئے تاکہ اِن کو ملانے والا بڑا دائرہ قطب میں سے گذرے۔ اگر عرض بلد فه ہو تو اِن دو سفروں میں مسافت کا فرق $\text{ا}(\pi\ \text{جم فه} - \pi + ۲\ \text{فه})$ ہے اور یہ اعظم قیمت اختیار کرے گا جبکہ $\text{جب فه} = \frac{۲}{\pi}$۔

مثال ۹۔ ثابت کرو کہ ایک نصف النہار سے ایک مقام تک جو دوسرے نصف النہار پر اُسی عرض بلد میں ہے سفر کرنے میں مشرق اور مغرب کی سمت میں سفر کرنے کی بجائے ایک بڑے دائرہ پر سفر کرنے سے فاصلہ میں جو بچت ہوتی ہے وہ عرض بلد

$$\text{جم}^{-۱}\left(\text{له جب له} \Big/ \sqrt{\text{له}^{۲} - \text{جب}^{۲}\ \text{له}}\right)$$

کے لیے اعظم ہے جہاں له اِن دو نصف النہاروں کے طول بلد کا فرق ہے۔

مثال ۱۰۔ ایک جہاز کا چھوٹے سے چھوٹا راستہ معلوم کرو جسے ایک

نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خاص عرض بلد کو عبور کئے بغیر جاتا ہے' یہ فرض کرلیا جائے کہ بڑے دائرہ کا راستہ اس عرض بلد کو قطع کرتا ہے۔

مثال ۱۱ — کیپ کلیر عرض بلد ۵۱° ۲۶' ش اور طول بلد ۹° ۲۹' م میں ہے۔ کیپ ریس عرض بلد ۴۶° ۴۰' ش اور طول بلد ۵۳° ۸' م میں ہے۔ اِس امر کی تصدیق کرو کہ اِن کے درمیان بڑے دائرہ کا راستہ سفر کے لیے اختیار کرنے میں اِس بات کی ضرورت ہے کہ کیپ کلیر سے اوپر ½ ۷۹ شمالی راستہ اختیار کیا جائے بہ نسبت اُس سیدھے راستہ کے جو مرکیٹری نقشہ سے معلوم ہوتا ہے۔ نیز یہ ثابت کرو کہ اول الذکر راستہ دوسرے راستہ کی بہ نسبت ۲۸ میل چھوٹا ہے۔

مثال ۱۲ — اگر کرہ کا نصف قطر ا اور ظل کے مبدا سے تسطیحی ظل کے مستوی کا فاصلہ م ہو' پ اور پَ متناظر نقطوں کا ایک زوج ہوں' اور ظل کے مبدا میں سے گذرنے والے قطر سے پَ کا فاصلہ ر ہو تو ثابت کرو کہ پ کے قریب ایک چھوٹی قوس ر کا ظل' پَ کے قریب ایک چھوٹی قوس ہوگا اور اس قوس کا طول $\text{ر}(\text{م}^{2}+\text{ر}^{2}) / ۲\,\text{م}\,\text{ا}$ ہوگا۔

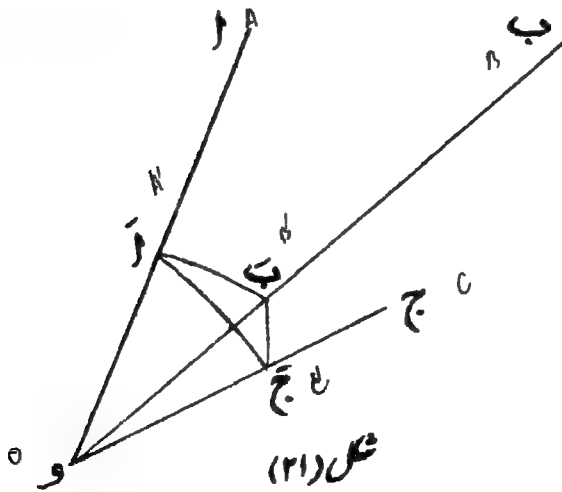
(۶۹)

چوتھا باب

کرۂ سماوی

Celestial Sphere

۲۶ ـ کرۂ سماوی

فرض کرو کہ تین ستارے ا، ب، ج (شکل ۲۱) ہیں اور مشاہد کا محل و ہے۔

شکل (۲۱)

فرض کرو کہ مرکز و اور کوئی نصف قطر و ا لیکر ایک کرہ بنایا گیا ہے جو و ا، و ب، و ج کو علی الترتیب ا، ب، ج پر قطع کرتا ہے اور اس طرح کروی مثلث ا ب ج حاصل ہوتا ہے۔ (۷۰)

زاویہ ا و ب وہ زاویہ ہے جو ستارے ا اور ب، مُشاہد کی آنکھ پر بناتے ہیں۔ اِس کو آسانی کے ساتھ ا ب کے ذریعہ ناپا جا سکتا ہے جو مثلث ا ب ج کا ایک ضلع ہے اسی طرح ب ج اور ج ا سے ب و ج اور ج و ا کے ناپ حاصل ہوتے ہیں۔

پس دو ستاروں کا ظاہری فاصلہ اُس زاویہ سے ناپا جاتا ہے جو اِن ستاروں کے محاذی مُشاہد کی آنکھ پر بنتا ہے۔ مثلاً ا اور ج کا ظاہری فاصلہ زاویہ ا و ج کے ذریعہ یعنے ا ج کے ذریعے ناپا جاتا ہے۔ دو ستاروں کے باہمی فاصلہ سے جو فی الحقیقت صرف ایک زاویہ ہے اِس امر کا کوئی ایما نہیں ہوتا کہ اِن کے درمیان اصلی فاصلہ کیا ہے، یہ فاصلہ بلا شبہ ایک خطی مقدار ہے۔ اِس اصلی فاصلہ کو معلوم کرنے کے لیے مُشاہد کے مقام سے اِن ستاروں کے خطی فاصلے معلوم ہونے چاہئیں۔ ثریا (Pleiades) کے ستارے دُب اکبر (Ursa Major) کے ستاروں کی بہ نسبت باہم بہت نزدیک نظر آتے ہیں لیکن اس سے یہ نتیجہ برآمد ہونا ضروری نہیں ہے کہ ثریا (Pleiades) کے ستارے باہم ایک دوسرے کے قریب واقع ہیں۔

اجسام سماوی کے اضافی محلوں کی فلکی پیمائیشوں سے صرف ظاہری فاصلوں کی تعیین ہوتی ہے اور یہ فاصلے جیسا کہ ہم اوپر دیکھ چکے ہیں وہ قوسیں ہیں جو و کے گرد کھینچے ہوئے کرہ پر واقع ہیں۔ اِس لیے فلکی پیمائشوں کا علم ہندسہ، کرہ کا علم ہندسہ ہے۔

زیر بحث کرہ کے اجسام سماوی کے ظاہری فاصلے بعینہٖ اس طرح معلوم ہوتے ہیں جیسے وہ آسمان پر دکھائی دیتے ہیں۔ اس لیے اس کرہ کو کرۂ سماوی کہا جاتا ہے۔ اِس کے نصف قطر کا طول غیر اہم ہے اور مختلف سماوی کروں کا مقابلہ کرنے میں ہم اِن کے نصف قطروں کو مساوی مان سکتے ہیں۔

کسی کرۂ سماوی کا مرکز مُشاہد کا مقام ہوتا ہے اور ظاہر ہے کہ ہر مقام کے لیے ایک مختلف کرۂ سماوی ہوگا۔ اب ہم اِس امر پر غور کریں گے کہ مختلف مقامات پر کے سماوی کرُے ایک دوسرے سے کس حد تک مختلف ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ مُشاہد ستارہ سماک رامح (Arcturus.) پر واقع ہے تو اِس کا بنایا ہوا کرہ سماوی وہی نہیں ہوگا جو زمین کے کسی مقام پر ایک دوسرا مُشاہد بناتا ہے۔ اِن دو صورتوں میں ستاروں کے کسی زوج کے باہمی ظاہری فاصلے بالعموم بالکل مختلف ہوں گے۔

مُشاہدوں کے مقام یعنے سماوی کرُوں کے مرکز جتنے قریب واقع ہوں گے سماوی کرُے زیادہ تر ایک دوسرے کے مشابہ ہوتے جائینگے۔ ثابت ستاروں (انہیں بالعموم ایسا ہی کہا جاتا ہے) کا جہاں تک تعلق ہے اُس حد تک یہ کہنا صحیح ہے کہ وہ سماوی کرُے جو سطح زمین پر کے تمام نقطوں کے لیے بنائے جائیں عملاً مماثل ہوتے ہیں۔ اِس کا باعث یہ ہے کہ زمین سے اِن ثابت ستاروں کے فاصلے اِس قدر بڑے ہیں کہ زمین کا قطر اِن کے مقابلہ میں بالکل ناقابل قدر ہے۔ تمثیلاً ہم یہ بیان کر سکتے ہیں کہ اگر مُشاہد کو زمین کے کسی مقام سے اِس کے تحت قدمی مقام پر منتقل کیا جائے تو دو ستاروں کے باہمی فاصلہ کا تغیر کسی صورت میں بھی قوس کے ایک ثانیہ کے ۱۶۰۰۰ ویں حصے سے تجاوز نہیں ہوسکتا جہاں تک کہ ہم فی الحال کوکبی فاصلوں سے واقف ہیں۔ ہمارے پیمائشی آلات اِس قدر نازک نہیں ہیں کہ اِس تغیر کو ناپ سکیں، اِس کا ہزار گُنا زاویہ لینے پر ہمارے آلات میں اِس زاویہ کی کوئی قدر معلوم ہوتی ہے۔ (۲۱)

سوُرج کے گرد زمین کی سالانہ حرکت کے باعث کسی ارضی مُشاہد کا مقام تقریباً ایک دائری راستہ پر جس کا اوسط نصف قطر ۹۲۹۰۰۰۰۰ میل ہے حرکت کرتا ہے۔ اِس لیے کوئی ارضی مشاہد چھ مہینوں کے وقفہ میں ایک ایسے فاصلہ پر منتقل ہو جاتا ہے جو اِس مقدار کا تقریباً دو چند ہے۔ لیکن اِن حالات میں بھی

بیشتر ستاروں کے ظاہری فاصلے بغیر کسی قابل قدر تغیر کے برقرار رہتے ہیں اور جہاں تک ہمارے علم کا تعلق ہے کسی صورت میں بھی اس انتقال کی باعث بڑے سے بڑا تغیر ۰.۰۵ً سے تجاوز نہیں ہوتا۔ (دیکھو پندرہواں باب)

اوپر جو کچھ بھی بیان کیا گیا ہے وہ صرف ثابت ستاروں کے متعلق ہے۔ ہم بارہویں باب میں یہ دیکھیں گے کہ کرہ سماوی پر سورج اور سیاروں کے ظاہری مقامات کچھ حد تک اور چاند کا ظاہری مقام بڑی حد تک اُس محل سے متاثر ہوتے ہیں جو زمین کی سطح پر مشاہد اختیار کرتا ہے۔

ہم اُن ذاتی حرکتوں پر اس وقت غور نہیں کر رہے ہیں جو بعض اجسام سماوی کی ہوتی ہیں۔ یہ حرکتیں بلا شبہ ہر رصدگاہ کے کرہ سماوی پر ان اجسام کے محلوں کو متاثر کرتی ہیں۔

اگر ہم سماوی کروں پر صرف اُن اجسام سماوی کو مرتسم کریں جیسے کہ بیشتر ثابت ستارے ہیں جو اس قدر دور ہیں کہ وہ ظاہری فاصلے جو انہیں ایک دوسرے سے جدا کرتے ہیں نظام شمسی کے تمام حصوں سے قریب قریب وہی رہتے ہیں تو ہم سماوی کروں کے متعلق حسب ذیل بیان دے سکتے ہیں جس میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان تمام کروں کے نصف قطر مساوی ہیں۔

نظام شمسی میں ہر مقام کے جواب میں ایک کرہ سماوی ہوگا جس کا مرکز یہ مقام ہوگا۔

نظام شمسی میں ہر کرہ سماوی ہر دوسرے کرہ سماوی کے مانند ہوتا ہے نہ صرف نصف قطر کے لحاظ سے بلکہ اُن ستاروں کے لحاظ سے بھی جو اس پر نشان زدہ ہوں۔

کسی دئے ہوئے لمحہ پر سماوی کرے سب کے سب متشابہاً واقع ہوتے ہیں یعنے ایک کرہ کا کوئی نصف قطر جو کسی مخصوص ستارے تک

کھینچا گیا ہو ہر دوسرے کرہ کے متناظر نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔ اکثر اس میں سہولت ہے کہ کرہ سماوی پر اس طرح بحث کی جائے کہ گویا اس کا مرکز زمین کے مرکز پر منطبق ہے۔

(۲۲)

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ محدود فاصلے پر کے کسی نقطہ کو کرہ سماوی کا مرکز خیال کیا جا سکتا ہے اگر کرہ کا نصف قطر لاانتہا بڑا ہو۔

فرض کرو کہ کرہ سماوی کا مرکز و ہے اور فرض کرو کہ و سے محدود فاصلہ پر کوئی نقطہ لا ہے اور کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ س ہے تو

$$\text{لاس}^2 = \text{وس}^2 - 2\,\text{وس} \times \text{ولا}\ \text{جم}\ \text{لاوس} + \text{ولا}^2$$

$$= \text{وس}^2 \left(1 - 2\,\frac{\text{ولا}}{\text{وس}}\ \text{جم}\ \text{لاوس} + \frac{\text{ولا}^2}{\text{وس}^2}\right)$$

اب چونکہ و لا محدود ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے وس لاانتہا کی طرف مائل ہوتا ہے $\frac{\text{ولا}}{\text{وس}}$ صفر کے قریب آتا ہے اسلیے انتہا لینے سے $\frac{\text{لاس}}{\text{وس}} = 1$۔ لیکن چونکہ وس کرہ پر کے تمام نقطوں س کے لیے مستقل ہے اس لیے لا س بھی مستقل ہونا چاہئے یعنی لا کو کرہ کا مرکز متصور کیا جا سکتا ہے اور اس سے کوئی قابل قدر خطا واقع نہیں ہوتی۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ لا س اور و س کی سمتیں انتہا میں منطبق ہونے کا میلان رکھتی ہیں۔

۲۷۔ اُفق سماوی۔

فرض کرو کہ زمین کی سطح پر مشاہد کا مقام پ ہے اور فرض کرو کہ اس کا کرہ سماوی کھینچ لیا گیا ہے جس کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کے مقابلہ میں بہت زیادہ بڑا ہے۔ اب اگر نقطہ پ پر زمین کا مماس مستوی کھینچا جائے تو یہ مستوی اس کرہ سماوی کو ایک بڑے دائرہ میں قطع کرے گا۔ اس بڑے دائرہ کو پ کا **اُفق سماوی** کہا جاتا ہے۔

کسی مقام پر افق کا مستوی، اُس مائع کی سطح کا مستوی بھی ہے جو ایک کھلے برتن میں اِس مقام پر سکون کی حالت میں ہو۔ یہ مستوی، ارضی کشش کی سمت پر عمود ہوتا ہے اور اِس لیے زمین کی سطح کے کسی مقام پ پر خطِ شاقول کی سمت اُس مستوی پر عمود ہوتی ہے جو پ کے افق کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر اِس خط شاقول کو ہر دو طرف خارج کیا جائے تو وہ کرۂ سماوی کو دو نقطوں میں قطع کرے گا۔ یہ نقطے علم ہیئت کروی میں بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔ نقطہ سا جو اس طرح ٹھیک سر کے اوپر حاصل ہو پ کا راس کہلاتا ہے۔ دوسرا نقطہ ف قدم کہلاتا ہے جو کرہ سماوی پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ہم خط شاقول کی سمت کو ٹھیک قدموں کی سمت میں خارج کریں۔ یہ سمت کرۂ سماوی کو اِس نقطہ پر قطع کرے گی۔

۲۸۔ یومی حرکت۔

زمین کی روزانہ گردش، اپنے محور کے گرد، ۲۳ گھنٹے ۵۶ منٹ ۴ ثانیوں کے تقریبی وقفہ میں مکمل ہوتی ہے اور اسے بالعموم شمسی دن کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ زمین کی اس روزانہ گردش کی باعث کرۂ سماوی کی ظاہری گردش مخالف سمت میں یعنے مشرق سے مغرب کی طرف حاصل ہوتی ہے، یہ ظاہری گردش یومی حرکت کے طور پر مشہور ہے۔

زمین کی محوری گردش کو ثابت کرنے کا راست ترین طریقہ فوکو (Foucault) کے رقاص کے تجربہ سے ہم پہنچتا ہے۔ اگر ہم زمین کو ایک کامل کرہ تسلیم کریں اور اِس کا مرکز و ہو تو فوکو کے رقاص کے اصول حسب ذیل ہیں:۔

فرض کرو کہ مقام پ پر مشاہد کا شمالی عرض بلد فہ ہے اور زمین کی زاوئی رفتار اپنے محور کے گرد سہ ہے۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سہ کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا گیا ہے، ایک جزو تحلیلی، وپ کے گرد، سہ جب فہ ہے اور دوسرا، وق کے گرد، سہ جم فہ ہے جہاں ق وہ نقطہ ہے

جس کا جنوبی عرض بلد ۹۰° ۔ فہ ہے اور جو پ کے نصف النہار پر واقع ہے۔ جہاں تک کہ پ اور اس کے نزدیک کے مقامات کا تعلق ہے اس آخری گردش کا اثر ان مقامات پر صرف انتقالی ہے اور اس لیے موجودہ مقصد کے لحاظ سے یہ جزو تحلیلی نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ دوسرے جزو تحلیلی کا یہ اثر ہوگا کہ اس کی باعث پ پر افق کا مستوی' و پ کے گرد' زاوی رفتار سہ جب فہ کے ساتھ گردش کرے گا۔ اس لیے اگر پ پر کا کوئی انتصابی مستوی و پ کے گرد گردش میں کوئی حصہ نہ لے یعنے وہ ساکن متصور کیا جائے تو اس کے ساتھ کوئی اور انتصابی مستوی جو و پ کے گرد گردش میں حصہ لیتا ہے ایسا زاویہ بنائے گا جو رفتار سہ جب فہ کے ساتھ بڑھتا رہے گا۔ فوکو رقاص وہ ذرائع بہم پہنچاتا ہے جو اس تجربہ کی تصدیق کرتے ہیں۔ عملی تفصیلات میں گئے بغیر اس تجربہ کی لازمی خصوصیت حسب ذیل ہے:۔

ایک ثابت نقطہ سے لمبے تار کے ذریعہ ایک بھاری وزن لٹکایا جاتا ہے۔ پھر اس وزن کو ایک طرف ہٹا کر احتیاط کے ساتھ چھوڑ دیا جاتا ہے تو یہ وزن آہستہ آہستہ آگے پیچھے اہتزاز کرتا ہے۔ وہ مستوی جس میں یہ رقاص اہتزاز کرتا ہے و پ کے گرد گردش میں حصہ نہیں لیتا۔ لیکن چونکہ مشاہد و پ کے گرد ارضی گردش کو دیکھ نہیں سکتا' اہتزاز کا مستوی اطراف واکناف کی ارضی اشیاء کے حوالے سے گردش کرتا ہوا نظر آتا ہے۔ اس حرکت کی سمت اور اس کی مقدار کی پیمائشوں سے زمین کی یومی حرکت متعین ہوتی ہے۔ اگر زمین کے کسی ایک قطب پر اس تجربہ کو عمل میں لانا ممکن ہوتا تو اس کو دکھانے کی یہ بہترین صورت ہوتی۔ خط استواء کے کسی مقام پر اہتزاز کے مستوی کی کوئی ظاہری حرکت نہیں ہوگی۔

سماوی کرے پر کے سب نقطے' بجز دو نقطوں کے' یومی حرکت میں حصہ لیتے ہیں۔ یہ دو نقطے بلا شبہ سماوی کرہ کے شمالی اور جنوبی قطب ہیں۔ ان نقطوں کو ملانے والا خط زمین کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور یہ خط وہ محور ہے جس کے گرد زمین گردش کرتی ہے۔ یہ ہمیشہ ذہن نشین رہے کہ زمین کے

(۷۲)

ابعاد سماوی کرہ کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہیں اور اس لیے موجودہ مقاصد کے لیے ہم زمین کو صرف یہ سمجھیں گے کہ وہ، سماوی کرہ کے مرکز پر صرف ایک نقطہ ہے۔ زمین کو ایسا سمجھنے میں خاص فائدہ یا سہولت یہ ہے کہ ہم نہ صرف سماوی کرہ کے محور کو زمین کے مرکز میں سے گذرتا ہوا فرض کر سکتے ہیں بلکہ ہم ہمیشہ یہ بھی تصور کر سکتے ہیں کہ یہ محور کسی مشاہد کے مقام میں سے بھی گذرتا ہے خواہ وہ زمین کی سطح پر کہیں واقع ہو۔ وہ قطب جو سماوی کرہ کے اُس حصہ میں واقع ہے جو شمالی عرض بلدوں میں رہنے والوں کو نظر آتا ہے شمالی قطب کے طور پر مشہور ہے۔ شمالی ہیئت داں طبقہ کی یہ خوش قسمتی ہے کہ شمالی قطب کا محل وقوع ایک چمکدار متصلہ ستارے، سے جسے قطب تارہ کہتے ہیں بہت عمدگی سے نمایاں ہے۔ جنوبی آسمان کا متناظر نقطہ جو جنوبی قطب کے طور پر مشہور ہے اتنی عمدگی سے نمایاں نہیں ہے کیونکہ اس کے قریب کوئی چمکدار ستارہ موجود نہیں۔

زمین کے خط استواء کا مُستوی یومی گردش سے متاثر نہیں ہوتا۔ یہ مستوی سماوی کرہ کو ایک بڑے دائرہ میں قطع کرتا ہے' یہ بڑا دائرہ سماوی خط استواء کے نام سے مشہور ہے اور اس کے قطب آسمان کے شمالی اور جنوبی قطب ہیں۔ خط استواء کے متوازی اور اس سے محدود فاصلہ پر کا کوئی مستوی سماوی کرہ کو سماوی خط استواء پر قطع کرتا ہے۔ ایسے سب مستویوں کے لیے خط استواء منعدم خط ہوتا ہے۔ زمین کا کوئی قطر (یا بلا شبہ کوئی مستقیم خط جو استواء ارطور پر زمین کے ساتھ لگا ہوا ہو اور دونوں طرف غیر محدود خارج کر دیا گیا ہو) سماوی کرہ کو دو نقطوں میں قطع کرے گا اور یہ نقطے زمین کی یومی گردش کی باعث وہ دائرے مرتسم کریں گے جنھیں متوازی دائرے کہا جاتا ہے۔ یہ دائرے بالعموم سماوی کرے کے چھوٹے دائرے ہوتے ہیں اور جب اِن کو پیدا کرنے والا خط زمین کے محور کے متوازی ہوتا ہے تو یہ دائرے علی الترتیب شمالی اور جنوبی قطبوں میں ضم ہو جاتے ہیں اور جب یہ خط زمین کے محور پر عمود ہوتا ہے تو وہ ایک دوسرے پر منطبق ہو کر خط استواء بن جاتے ہیں۔

افق سماوی، کرۂ سماوی کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ایک وہ نیم کرہ جو مرئی ہے اور دوسرا وہ نیم کرہ جو غیر مرئی ہے۔ جب کوئی ستارہ افق کے نیچے سے افق کے اوپر آرہا ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ستارہ طلوع ہو رہا ہے اور جب وہ افق کے اوپر سے افق کے نیچے جا رہا ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ستارہ غروب ہو رہا ہے۔ اگر مشاہد زمین کے شمالی قطب پر ہو تو سماوی قطب شمالی اُس کے راس پر ہوگا اور اس کا افق سماوی خط استوا ہوگا۔ اس صورت میں زمین کی یومی حرکت کی باعث ستارے افق کے متوازی حرکت کرتے نظر آئیں گے اور طلوع اور غروب کے مظاہر پیش نہ آئیں گے، کرہ سماوی کے ایک نصف کا کوئی حصہ افق کے اوپر کبھی نہ آئے گا اور دوسرے نصف کا کوئی حصہ کبھی غروب نہ ہوگا۔ اگر مشاہد ارضی خط استوا پر ہو تو شمالی اور جنوبی قطب اُس کے افق پر ہوں گے اور دو نیم کرے جن میں افق سماوی کرہ کو تقسیم کرتا ہے مسلسل بدلتے رہیں گے۔ ستارے افق کے نمودار طلوع ہوں گے اور آسمان کا ہر ستارہ مشاہد کے افق کے اوپر نیم شمسی یوم تک نمودار رہے گا اور افق کے نیچے دوسرے نیم یوم تک غروب رہے گا۔ پس قطب پر کے مشاہد اور خط استوا پر کے مشاہد کے حالات میں یہ فرق ہوگا کہ مقدم الذکر مقام پر کرہ سماوی کا جتنا حصہ کسی لمحہ نظر آتا ہے وہ حصہ کبھی بھی زمین کی یومی گردش کی وجہ سے غیر مرئی نہیں ہو سکتا، برخلاف اس کے خط استوا پر کے مشاہد کے لیے سماوی کرہ کا ہر جزو کبھی غیر مرئی ہو جاتا ہے اور کبھی مرئی۔ (۷۵)

کسی ارضی مقام پر جو نہ قطب ہے اور نہ خط استوا پر واقع ہے سماوی کرہ کا کچھ حصہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے گا اور کچھ حصہ ہمیشہ افق کے نیچے رہے گا اور باقی حصہ کبھی افق کے اوپر اور کبھی افق کے نیچے۔ ہر ستارہ زمین کی یومی حرکت کی وجہ سے کرہ سماوی کے ایک چھوٹے دائرہ میں گردش کرتا نظر آئے گا، اس چھوٹے دائرہ کا مرکز سماوی کرے کا ایک قطب ہوگا۔ اگر یہ چھوٹا

[1] اس میں انعطاف کی رعایت نہیں رکھی گئی ہے۔

دائرہ بالکلیہ افق کے اوپر واقع ہو تو ستارہ کبھی غروب نہ ہوگا اور اس لیے ہمیشہ نمودار رہے گا (بادلوں یا سورج کی روشنی وغیرہ کی مداخلت فی الحال خارج از بحث ہے)۔ اگر یہ دائرہ بالکلیہ افق کے نیچے واقع ہو تو ستارہ کبھی طلوع نہ ہوگا اور اس لیے زیر بحث مقام پر کبھی بھی نمودار نہ ہوگا۔ لیکن اگر یہ دائرہ افق کو قطع کرے تو ستارہ کبھی افق کے اوپر اور کبھی افق کے نیچے ہوگا۔

۲۹۔ نصف النہار اور اول السمت۔

وہ بڑا دائرہ جو سماوی قطبین میں سے اور مُشاہد کے راس اور قدم میں سے گذرتا ہے اُس مقام کا نصف النہار کہلاتا ہے جہاں مُشاہد مقیم ہے۔ سماوی نصف النہار وہ بڑا دائرہ بھی ہے جو مُشاہد کے ارضی نصف النہار کے مستوی اور سماوی کرہ کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے۔ پس سماوی نصف النہار وہ بڑا دائرہ ہے جو شمالی نقطہ ش (شکل ۲۲) سے افق کے علی القوائم نکلتا ہے اور پھر جنوبی نقطہ ج پر آکر افق سے عموداً ملتا ہے اور پھر افق کے نیچے اپنے راستے کو ش تک جاری رکھتا ہے۔

سماوی کرہ کی یومی گردش میں ہر ستارہ نصف النہار کو لازماً دو مرتبہ عبور کرے گا اور ہر موقع پر ہم کہتے ہیں کہ ستارہ مرور کر رہا ہے۔ شمالی اور جنوبی قطبوں سے نصف النہار دو نیم دائروں میں تقسیم ہوتا ہے، ان میں سے ایک میں راس ہوتا ہے اور دوسرے میں قدم۔ جب ستارہ پہلے نیم دائرہ کو مرور کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ بالائی تکبُّد پر ہے اور جب وہ دوسرے نیم دائرہ کو مرور کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ زیرین تکبُّد پر ہے۔

(۷۶)

سماوی کرہ کے بڑے دائروں میں نصف النہار سب سے زیادہ اہم ہے کیونکہ وہ کرہ کے دو اہم ترین نقطوں یعنے قطب ق اور راس ر (شکل ۲۲) میں سے گذرتا ہے۔ تین اور نقطے ہیں جو خاص طور پر قابل یادداشت ہیں۔ یہ نقطے حسب ذیل ہیں، شمالی نقطہ ش اور جنوبی نقطہ ج جن میں نصف النہار افق کو قطع کرتا ہے، اور نقطہ ا جس میں نصف النہار سماوی خط استوا کو

قطع کرتا ہے۔

عرض بلد فہ وہ زاویہ ہے جو خط شاقولی کی سمت اور خط اُستواء کے درمیان ہوتا ہے۔ پس (شکل ۲۲) مشاہد کا عرض بلد زاویہ س و ا ہے یعنے

شکل (۲۲) شمالی نیم کرہ میں عرض بلد فہ بر نصف النہار

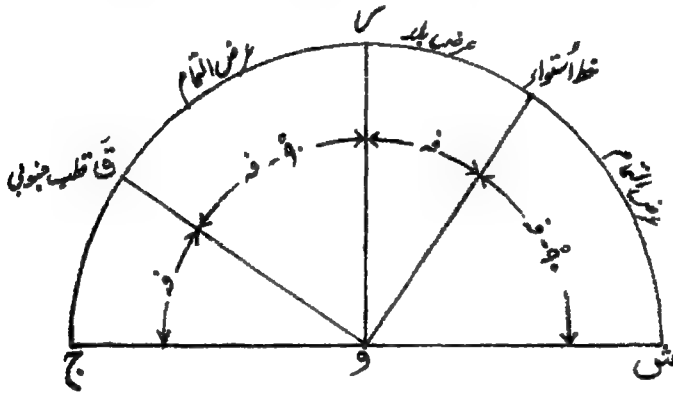
وہ زاویہ جو راس اور خط اُستواء کے درمیان ہے۔ چونکہ ق و ا اور س و ش دونوں قائمہ زاوئے ہیں اس لیے ش و ق، فہ کے مساوی ہونا چاہیے اور زاویہ ش و ق جو افق کے اوپر قطب کا زاویہ ارتفاع ہے اِس کا ارتفاع کہلاتا ہے جیسا کہ ہم دفعہ ۳۰ میں دیکھینگے۔ پس ہم اِس بنیادی مسئلہ پر پہنچتے ہیں کہ

قطب کا ارتفاع مُشاہد کا عرض بلد ہوتا ہے۔

راس س سے اوپر کے قطب ق تک جو قوس س ق = ۹۰ - فہ ہے اِس کو بالعموم عرض التمام (Colatitude) کہتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ کوئی ستارہ لا غروب نہیں ہوتا جب تک کہ اوپر کے قطب سے اِس کا فاصلہ ق لا مُشاہد کے عرض بلد سے متجاوز نہ ہو۔ اُس ستارہ کو جو غروب نہیں ہوتا حائط قطبی (Circumpolar) ستارہ کہتے ہیں اور خط اُستواء سے شمالی قطب کی جانب اِس کا فاصلہ ا لا یعنے اِس کا

شمالی میل (دفعہ ۳۱) ۹۰° - فہ سے کم نہ ہونا چاہیئے ۔ کوئی ستارہ طلوع نہ ہوگا اگر اس کا جنوبی میل ۹۰° - فہ سے زیادہ ہو ۔

(۷۷) شکل ۲۲ کے جواب میں وہ نقشہ جو جنوبی نیم کرہ میں نصف النہار کو تعبیر کرتا ہے شکل ۲۳ میں دیا گیا ہے ۔ یہ یاد رہے کہ جنوبی عرض بلد اکثر اس طرح ظاہر کئے جاتے ہیں کہ عرض بلد کی عددی قیمت کے ماقبل منفی علامت لگا دی جاتی ہے مثلاً شکل ذیل میں عرض بلد - فہ کا نصف النہار دکھایا گیا ہے ۔

شکل (۲۳) جنوبی نیم کرہ میں جنوبی عرض بلد فہ پر نصف النہار

وہ بڑا دائرہ جو راس میں سے گذرتا ہے اور نصف النہار پر علی القوائم ہے (اول السمت) کہلاتا ہے ۔ یہ بڑا دائرہ افق کے مشرقی اور مغربی نقطوں میں سے گذرتا ہے ۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ عرض بلد فہ کے ایک مقام کے حوالہ سے ایک ستارہ کے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے راسی فاصلے علی الترتیب ۱۸۰° - {۰° ~ (فہ + ضہ)} اور فہ ~ ضہ ہیں جہاں ضہ ستارہ کا میل ہے ۔

مثال ۲ ۔ اگر کسی ستارہ کا راسی فاصلہ ہمیشہ ایک ہی رہے تو ثابت کرو کہ مشاہد کا عرض بلد ۹۰° ہے یا ستارہ کا میل ۹۰° ہے ۔

مثال ۳ ۔ ثابت کرو کہ اگر کوئی ستارہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے تو {۰° ~ (فہ + ضہ)} > ۹۰°، اگر وہ ہمیشہ افق کے نیچے رہے تو فہ - ضہ > ۹۰°،

اور اگر وہ طلوع اور غروب ہوتا ہو تو {۰° ـ (فہ + ضہ)} > ۹۰° اور فہ ـ ضہ > ۹۰°۔

مثال ۴ — اگر مشاہد کا عرض بلد معلوم ہو تو بتاؤ کہ کسی ستارہ کا میل مرور کے وقت اس کے راسی فاصلہ کا مشاہدہ کرنے سے کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۵ — گرینوچ کا عرض بلد ۵۱° ۲۸ʹ ۳۸ʺ ہے ثابت کرو کہ گرینوچ کے نصف النہار میں (شکل ۲۲)

ج ا = ی ق = ۳۸° ۳۱ʹ ۲۱ʺ

اور ا ی = ق ش = ۵۱° ۲۸ʹ ۳۸ʺ

مثال ۶ — ثابت کرو کہ وہ کم سے کم عرض بلد ۵۱° ۲۹ʹ ہے جس پر کے تمام ستارے جن کا شمالی میل ۳۸° ۳۱ʹ سے متجاوز ہو دائم قطبی ستارے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اس عرض بلد پر وہ تمام ستارے جن کا جنوبی میل ۳۸° ۳۱ʹ سے متجاوز ہو نمودار نہیں ہوتے۔

مثال ۷ — ۱۳ نومبر کو سورج قطب شمالی سے ۱۰۸° پر ہے۔ ثابت کرو کہ کسی شمالی عرض بلد میں جو ۷۲° سے متجاوز ہو سورج افق کے اوپر طلوع نہیں ہوتا۔

مثال ۸ — اسٹاک ہوم (Stockholm) کی رصدگاہ عرض بلد ۵۹° ۲۰ʹ ۳۳ʺ ش میں ہے اور راس امید (Cape of Good Hope) کی رصدگاہ عرض بلد ۳۳° ۵۶ʹ ۳ʺ ج میں واقع ہے۔ شعری (Sirius) کا میل ـ ۱۶° ۳۵ʹ ۲۲ʺ ہے۔ اس کے ارتفاع معلوم کرو جب وہ علی الترتیب اسٹاک ہوم اور راس امید پر تکبّد میں ہو۔　(۷۸)

نصف النہار پر قطب شمالی سے افق کے جنوبی نقطہ تک فاصلہ ۱۸۰° ـ فہ ہے جہاں فہ شمالی عرض بلد ہے (شکل ۲۲)۔ قطب سے کسی ستارہ کا فاصلہ جس کا میل ضہ ہو ۹۰° ـ ضہ ہے (جبکہ ضہ کے ماقبل مناسب علامت لگائی جائے) اس لیے افق کے جنوبی نقطہ سے ستارہ کا فاصلہ

۱۸۰° ـ فہ ـ (۹۰° ـ ضہ) = ۹۰° ـ فہ + ضہ

ہے۔ پس اسٹاک ہوم کی صورت میں (چونکہ شعری کا میل منفی ہے) شعری کا ارتفاع ہے

۹۰° ـ (۵۹° ۲۰ʹ ۳۳ʺ) ـ (۱۶° ۳۵ʹ ۲۲ʺ) = ۱۴° ۴ʹ ۵ʺ

جنوبی عرض بلد پر (شکل ۲۳) قطب جنوبی سے شمالی نقطہ تک قوس ۱۸۰° - فہ ہے اور قطب جنوبی سے شمالی میل ضہ تک قوس ۹۰° + ضہ ہے۔ اس لیے تکبّد کے وقت ارتفاع

۱۸۰° - فہ - (۹۰° + ضہ) = ۹۰° - فہ - ضہ

ہے۔ پس راس امید پر شعریٰ کا ارتفاع بوقت تکبّد یہ ہے

۹۰° - (۳۳° ۵۶′ ۳٫۵″) + ۱۶° ۳۵′ ۲۲٫۰″ = ۷۲° ۳۹′ ۱۸٫۵″

مثال ۹ — اگر ایک حائط قطبی ستارے کے راسی فاصلے بالائی اور زیرین تکبّدوں پر علی الترتیب ر۱، ر۲ ہوں اور اگر یہ دونوں تکبّد راس کے شمال میں ہوں تو ثابت کرو کہ مشاہد شمالی عرض بلد ۹۰° - ½ (ر۱ + ر۲) ہیں ہے۔

۳۰ — ارتفاع اور السمت۔

سماوی محددوں کا صریح ترین نظام شاید وہ ہے جس میں افق کو بنیادی دائرہ کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ ستارہ افق کے اوپر ہے اور ایک بڑا دائرہ راس سے ستارہ میں سے گذرتا ہوا کھینچا گیا ہے جو افق پر آکر ختم ہوتا ہے جسے یہ علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ایسے دائرہ کو **انتصابی دائرہ** کہتے ہیں۔ اس دائرہ کی وہ قوس جو افق اور ستارہ کے درمیان ہے ستارہ کا **ارتفاع** کہلاتی ہے اور ستارہ کا مقام متعین کرنے میں ایک محدد کا کام کرتی ہے۔ دوسرا محدد **السمت** ہے جو افق پر مختلف طریقوں سے شمار کیا جاتا ہے۔ مناسب یہ ہے کہ اس معاملہ میں ایک یکساں طریق عمل اختیار کیا جائے۔ اس لیے ہم کسی جرم فلکی کا السمت افق کے شمالی نقطہ سے افق کے گرد مشرق اور پھر جنوب کی طرف ستارہ کے انتصابی دائرہ کے پائین تک قوسی فاصلہ سے پیمائش کریں گے[1]۔ پس السمت کی ۰° سے ۳۶۰° تک

---

[1] السمت محسوب کرنے کا یہ طریقہ قدما کا اختیار کردہ ہے۔ میں نے اسے ۱۶۴۲ء کے کمپس کارڈ (Compass Card) پر دیکھا ہے جسے پروفیسر سلوینس تھامسن نے ازراہ مہربانی مجھے دکھایا تھا۔

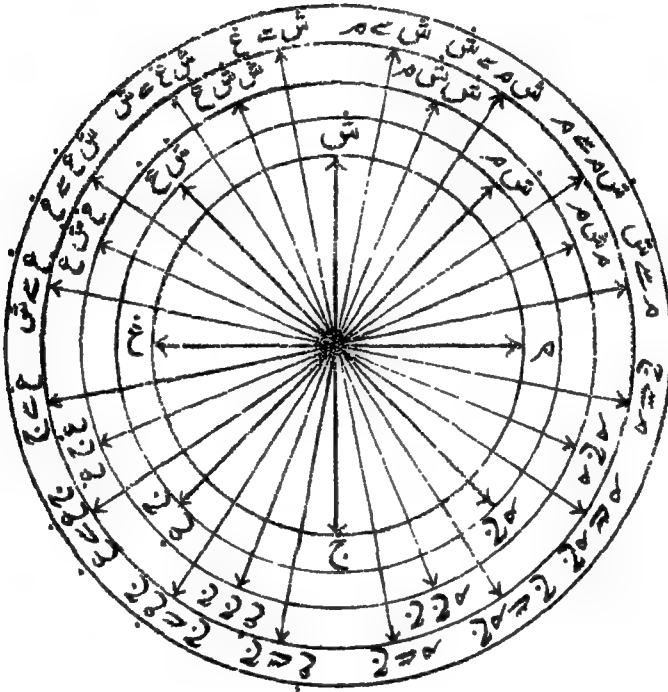
کوئی قیمت ہو سکتی ہے اور اس افق کا نصف شطب بھی اس طرح درجہ بندی ہوئی ہو قدم قدم ہٹ ۔ ؛ راس نہیں ہے۔ جب کسی ستارے کے ارتفاع اور السمت معلوم ہوں تو اس کا محل متعین ہو جاتا ہے۔

(۶۹) مثلاً اگر ایک ستارہ کا السمت ۳۱۰° اور اس کا ارتفاع ۱۵° ہو تو ستارہ کا محل اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ ہم افق کے شمالی نقطہ سے چلتے ہیں اور مشرق کی طرف السمت ۹۰° تک بڑھتے ہیں اور پھر وہاں سے جنوب کی طرف السمت ۱۸۰° تک اور مغرب کی طرف السمت ۲۷۰° تک جا کر اسی سمت میں اور ۴۰° طے کرتے ہیں تو السمت ۳۱۰° پر پہنچ جاتے ہیں۔ اس میں شک نہیں کہ وہ انتصابی دائرہ جس پر ہم اس طریقہ سے پہنچتے ہیں اس طرح بھی کھینچا جا سکتا تھا کہ اس کا السمت ۵۰°- ہو یعنے وہ شمالی نقطہ سے مغربی جانب ۵۰° پر واقع ہے لیکن اس مدد میں منفی قیمتوں سے بچنا زیادہ سہولت بخش ہے کیونکہ ۳۶۰° جمع کرنے سے ہمیشہ ایسا کیا جا سکتا ہے۔ اس نقطہ کی جس پر انتصابی دائرہ افق سے ملتا ہے اس طور پر السمت کے ذریعہ تعیین ہو جانے کے بعد انتصابی دائرہ پر معلومہ ارتفاع پر ایک نقطہ لینا ہوگا جو اس صورت میں افق کے اوپر ۱۵° پر ہے، اس طرح ہمیں ستارہ کا مطلوبہ محل حاصل ہو جائیگا۔

ستارے کے ارتفاع کی بجائے ارتفاع کا متمم استعمال کرنا اکثر سہولت کا باعث ہوتا ہے، یہ متمم بالعموم راسی فاصلہ کے طور پر مشہور ہے۔ مثلاً زیر بحث سوال میں ۱۵° ارتفاع ہے اور اس لیے ۷۵° راسی فاصلہ ہے۔

السمت کی تقریبی پیمائشوں کے لیے مقناطیسی کمپاس (قطب نما) استعمال کیا جاتا ہے۔ کمپاس کی سوئی مقناطیسی شمال کو دکھاتی ہے جو اصلی شمال سے کسی قدر منحرف ہوتا ہے، ان دو شمالوں کے درمیان جو زاوئی فصل ہے اس کو **مقناطیسی انصراف** کہتے ہیں۔ یہ انصراف مختلف اوقات اور نیز مختلف مقامات پر متغیر ہوتا ہے۔ جزائر برطانیہ کے لیے سنہ ۱۹۰۸ء میں سوئی اوسطاً ۱۸° اصلی شمال سے مغربی جانب ہٹی ہوئی رہتی تھی اس طرح مقناطیسی شمال کا السمت سنہ ۱۹۰۸ء میں جزائر برطانیہ کیلئے

تقریباً ۲۴۲° تھا[1]۔

(۸۰) بحری کمپاس میں محیط کو ۱/۴ ۱۱ کے مساوی وقفوں پر ۳۲ مساوی **نقطوں** میں تقسیم کیا جاتا ہے اور سمتیں تیروں کے ذریعہ ایک کارڈ پر دکھائی جاتی ہیں۔ اِس کمپاس کا نمونہ ذیل میں درج ہے۔

[1] نیاشنل فیزیکل لیابوریٹری نے حسب ذیل معلومات ازراہ مہربانی ارسال کئے ہیں:-
سنہ ۱۹۰۶ء میں اوسط مقناطیسی انصراف:-

کیو	۱۶° ۲۸٫۵′ م
اسٹونی ہرسٹ	۱۷° ۴۸٫۳′ م
ویالنسیا	۲۱° ۶٫۳′ م

مقناطیسی انصراف گھٹ رہا ہے اور کیو پر اِس کے تغیر کی سلانہ مقدار کی اوسط

کارڈ پر چار خاص نقطے ش (مقناطیسی شمال پر)، م (مشرق)، ج (جنوب)، اور غ (مغرب) نشان زدہ ہوتے ہیں، ان میں سے ہر ایک ۹۰° کے وقفہ پر ہے۔ ان میں سے ہر وقفہ ان نقطوں سے جن پر ش م، م ج، ج غ، غ ش کے نشان ہیں علی الترتیب تنصیف ہوتا ہے۔ اس طرح محیط آٹھ مساوی حصوں میں تقسیم ہو جاتا ہے۔ پھر ان میں سے ہر حصہ کی تنصیف کی گئی ہے ش اور ش م کی تنصیف ش ش م سے نشان زدہ ہے، اور ش م اور م کی تنصیف م ش م سے نشان زدہ ہے اور علیٰ ہذا القیاس اس طرح سولہ نقطوں کی تعیین عمل میں آتی ہے۔ باقی سولہ نقطوں کو پہلے آٹھ نقطوں ش، م، ج، غ، ش م، ج م، ج غ، ش غ سے اس طرح اخذ کیا جاتا ہے کہ صرف لفظ "سے" کا اضافہ کر کے حرفوں ش، م، ج، غ میں سے کوئی ایک ساتھ لکھ دیا جاتا ہے۔ مثلاً "غ سے ش" کے معنی "مغرب سے شمال کی طرف ایک نقطہ" ہے۔ اسی طرح "غ سے ج" کے معنی "مغرب سے جنوب کی طرف ایک نقطہ" ہے اور "ج م سے م" کے معنی "ج م سے م کی طرف ایک نقطہ"۔

مثال ۱۔ نقطہ "ش م سے ش" کا السمت معلوم کرو جبکہ یہ (۸۱)

بقیہ نوٹ:۔
قیمتیں مظہرہ سینن کے سلسلوں کے لیے حسب ذیل ہیں:۔

۱۸۷۰ء تا ۱۸۸۰ء ..... ۸٫۱′ ۱۸۹۰ء تا ۱۹۰۰ء ..... ۵٫۸′
۱۸۸۰ء تا ۱۸۹۰ء ..... ۶٫۸′ ۱۹۰۰ء تا ۱۹۰۶ء ..... ۴٫۰′

ویالنسیا میں مشاہدات ۱۹۰۱ء میں شروع ہوئے۔ ۱۹۰۱ء سے ۱۹۰۶ء تک پانچ سالوں کے لیے انصراف میں سالانہ تغیرات کی اوسط قیمتیں حسب ذیل تھیں:۔

استونی ہرسٹ ..... ۳٫۴′ فالماوتھ ..... ۴٫۰′
کیو ..... ۴٫۱′ ویالنسیا ..... ۴٫۳′

السمت مقناطیسی شمال سے پیمائش کیا گیا ہو۔

ش و، مقناطیسی شمال سے چار نقطوں پر ہے اور "ش م سے ش" کے معنے ش م سے شمال کی طرف (یعنے اُلٹے) ایک نقطہ۔ اس لیے جواب ہے تین نقطے یعنی $۳ \times ۱۱\frac{۱}{۴} = ۳۳\frac{۳}{۴}^\circ$۔

مثال ۲ — اسی طرح ثابت کرو کہ مقناطیسی شمال سے غ ش غ کا السمت ۲۹۲٫۵° پر ہے۔

مثال ۳ — اگر ایک نقطہ کا السمت جو کمپس سے معلوم کیا گیا ہو ۲۳° ہو تو اصلی السمت معلوم کرو جبکہ مقناطیسی انصراف ۱۸٫۵° غ ہو۔

مثال ۴ — مقناطیسی شمال سے نقطہ "ج م سے ج" کا اصلی السمت معلوم کرو اگر مقناطیسی انصراف ۱۷° غ ہو۔

چوتھے باب پر مختلف مثالیں

مثال ۱ — اگر مشاہد سے دو ستاروں کے حقیقی فاصلے $ر_۱$، $ر_۲$ ہوں اور اِن ستاروں کے درمیان کرہ سماوی پر ظاہری فاصلہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ اِن ستاروں کے درمیان حقیقی فاصلے کا مربع حسب ذیل ہے

$$ر_۱^۲ - ۲ ر_۱ ر_۲ \text{ جم طہ} + ر_۲^۲$$

مثال ۲ — ثابت کرو کہ اول السمت، افق، اور خط استوا ایک دوسرے کو وہی دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

مثال ۳ — اگر زمین کو ایک کرہ نما تسلیم کرنے سے اِس کے استوائی اور قطبی نصف قطر ا اور ب ہوں تو ثابت کرو کہ زمین کے کسی نقطہ پر بڑے سے بڑا ممکن زاوئی فرق جو اِس نقطہ پر زمین کے نصف قطر اور خط شاقول کے درمیان ہو سکتا ہے یہ ہے

$$\text{مس}^{-۱} \frac{ا^۲ - ب^۲}{۲ ا ب}$$

مثال ۴ — اگر ایک ستارہ کا میل غہ، عرض بلد فہ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ اس ستارہ کے السمت کو نصف النہار کی ایک جانب زاویہ

جہتا (جم ضہ قط فہ)

اور دوسری جانب اس کے مساوی زاویہ کے درمیان اہتزاز کرنا چاہئے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ اس زاویہ کی جیب التمام جو ایک ستارہ کا طریق بوقت غروب افق کے ساتھ بناتا ہے

"عرض بلد کی جیب مضروب میل کا قاطع"

کے مساوی ہے۔

مثال ۶ — دو مقامات کا عرض بلد ایک ہی ہے اور ان میں سے گذرنے والے بڑے دائرہ سے قطب کا فاصلہ سورج کے میل کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مقامات پر شب کا طول ان کے طول البلدوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔

(۸۲)

پانچواں باب

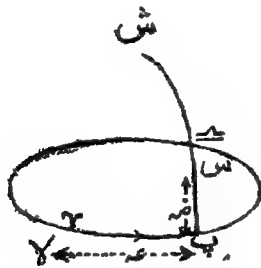
صعود مستقیم اور میل ۔ سماوی عرض بلد اور طول بلد

دفعہ صفحہ

۳۱ ۔ صعود مستقیم اور میل ۔ اگرچہ ارتفاع اور السمت ایک لحاظ سے کسی ستارے کے سادہ ترین محدود ہوتے ہیں لیکن بعض دوسرے محددوں کے نظاموں سے زیادہ سہولت پیدا ہوتی ہے کسی ستارے کے ارتفاع اور السمت وقت کے ساتھ مسلسل بدلتے رہتے ہیں، جس کا باعث یومی حرکت ہے ۔ نیز ایک ہی آن پر ایک ہی ستارے کے ارتفاع اور السمت دو مختلف رصدگاہوں میں مختلف ہوتے ہیں ۔ اس لیے یہ امر قابل ترجیح ہے کہ ایسے

محدد استعمال کئے جائیں جو یومی حرکت کی وجہ سے نہ بدلیں اور وہی رہیں خواہ مشاہد کے محل کے عرض بلد اور طول بلد کچھ بھی ہوں۔ ہم ایسے محدد معلوم کر سکتے ہیں جن میں مطلوبہ خاصیتیں موجود ہوں اگر ہم ستارہ کا حوالہ کرۂ سماوی پر کے ایک ثابت بڑے دائرہ سے دیں۔

سماوی خط استواء جیسا کہ قبل ازیں بتایا جا چکا ہے (دفعہ ۲۸) اپنے محل میں یومی گردش کے باوجود غیر متغیر رہتا ہے۔ نیز خط استواء یومی حرکت کے ساتھ ایک ایسا فطری تعلق رکھتا ہے کہ وہ خاص طور پر بنیادی دائرہ کا کام دینے کے لیے موزوں ہے چنانچہ علم ہیئت کروی میں سب سے زیادہ کارآمد محدد خط استواء کے حوالہ سے ہی پیمائش کئے جاتے ہیں۔ جب محددوں کو خط استواء کے حوالہ سے لیا جاتا ہے تو کرۂ سماوی کے کسی نقطہ کے محدد یومی حرکت کی وجہ سے نہیں بدلتے اور نہ اُس وقت بدلتے ہیں جبکہ مشاہد کا مقام تبدیل ہو سوائے اس صورت کے جبکہ جرم سماوی زمین سے اس قدر نزدیک ہو کہ اختلاف منظر قابل قدر ہو جائے۔ اِس پر بارھویں باب میں بحث کی جائے گی اس لیے یہاں اِس کی تشریح ضروری نہیں ہے۔ (۸۳)

کسی ستارہ کے محدد خط استواء کے لحاظ سے معلوم کرنے میں ہم حسب ذیل طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ خط استواء ♈ پ ے ہے اور ایک بڑا دائرہ ش پ (شکل ۴۴) سماوی قطب شمالی ش سے ستارہ س میں سے گذرتا ہوا کھینچا گیا ہے اور یہ دائرہ خط استواء سے پ پر ملتا ہے۔ اِس دائرہ پر مقطوعہ قوس پ س جو خط استواء اور ستارہ کے درمیان ہے ستارہ کا میل کہلاتی ہے۔ قوس ♈ پ جو خط استواء پر کے ایک خاص

شکل (۴۴)

نقطہ ♈ سے اُس سمت میں ناپی گئی ہے کہ ش اِس کا شطب ہے ستارہ کا صعود مستقیم کہلاتی ہے۔

صعود مستقیم (یا ص۔ م جیسا کہ اکثر اختصاراً لکھا جاتا ہے) کو بالعموم ہم صرف ع سے ظاہر کرینگے اور اس کی پیمائش ۰° سے ۳۶۰° تک ہو سکے گی۔ میل کو ہم بالعموم ضہ سے ظاہر کرینگے اور اِس کے ماقبل منفی علامت لگا دینگے اگر ستارہ س خط استواء کے جنوب میں ہو۔ س ش یعنے ۹۰° - ضہ **شمالی قطبی فاصلہ** ہے اور بعض اوقات ضہ کی جگہ ستارے کے دوسرے محدد کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

۳۲ — **نقطۂ راس الحمل یا ♈** — ہم کسی آئندہ باب میں ثابت ستاروں کے لحاظ سے سورج کی ظاہری سالانہ حرکت پر غور کریں گے۔ لیکن ہم یہاں اِس قدر کہہ سکتے ہیں کہ سورج ثابت ستاروں کے حوالہ سے سال میں ایک مرتبہ زمین کی یومی گردش کی سمت میں (یعنے مغرب سے جنوب اور پھر جنوب سے مشرق کی طرف) ایک مکمل دور مرتسم کرتا ہے۔ اِس حرکت میں سورج کا مرکز تقریباً کرہ سماوی کے ایک بڑے دائرہ پر حرکت کرتا ہوا معلوم ہوتا ہے۔ یہ بڑا دائرہ **طریق الشمس** (Ecliptic) کے طور پر مشہور ہے قدماء نے اسے (Ecliptic) اس وجہ سے کہا کہ جب خسوف واقع ہوتے ہیں تو چاند اِس بڑے دائرہ کو عبور کرتا ہے۔

اُس سمت کا مشاہدہ کرنے سے جس میں سورج طریق الشمس کے گرد حرکت کرتا ہے ہم طریق الشمس اور خط استواء کے نقاط تقاطع یا دو **عقدوں** کے درمیان امتیاز کر سکتے ہیں۔ اِن عقدوں کی تخصیص اِس طرح عمل میں آتی ہے اُس عقدہ کو جس پر سورج خط استواء کو اس کے جنوب سے شمال کی طرف حرکت کرتا ہوا عبور کرتا ہے راس الحمل کہتے ہیں اور اسے علامت ♈ سے ظاہر کرتے ہیں۔ سورج ♈ میں سے اُس آن گذرتا ہے جسے **اعتدال ربیع** (Vernal equinox) کہتے ہیں۔ یہ ہر سال تقریباً بتاریخ ۲۱ مارچ واقع ہوتا ہے۔

(۸۴)

مثلاً سنہ ۱۹۰۹ء میں اعتدال ربیع بتاریخ ۲۱ مارچ بوقت ۶ گ ۱۴ م گرینوچ اوسط وقت واقع ہوا تھا۔

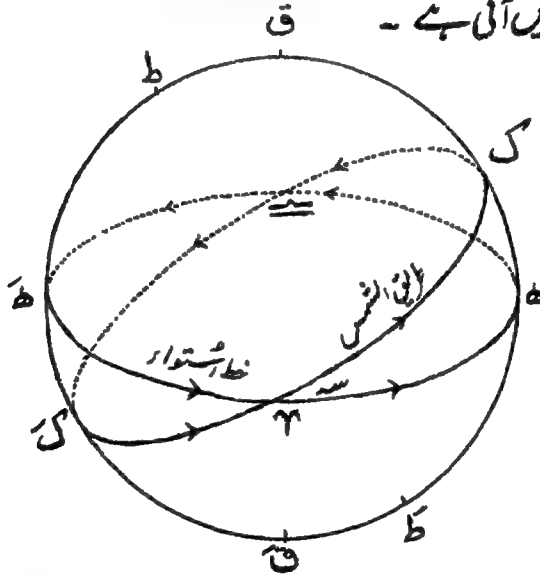
دوسرا عقدہ یا وہ نقطہ جس پر سورج خط استواء کو اس کے شمال سے جنوب کی طرف حرکت کرتا ہوا عبور کرتا ہے برج میزان کا پہلا نقطہ (First pt. of Libra) کہلاتا ہے اور اسے علامت ♎ سے تعبیر کرتے ہیں۔ سورج ♎ میں سے اس آن گذرتا ہے جو اعتدال خریف (Autumnal equinox) کے طور پر مشہور ہے۔ (سنہ ۱۹۰۹ء ستمبر ۲۳ بوقت ۷ گ ۴۵ م گ ب۔ (۱-۹)۔

ہیئت دانوں نے متفقہ طور پر صعود مستقیم کی پیمائش کے لیے راس الحمل یعنے ♈ کو مبداء قرار دیا ہے۔ خط استواء پر مثبت سمت وہ ہے کہ سورج کا صعود مستقیم جو سورج کی حرکت کی وجہ سے ہر آن متغیر ہے ہمیشہ بڑھتا ہے۔ مثلاً چونکہ ستاروں کے درمیان سورج کا راستہ مغرب سے جنوب کی طرف اور جنوب سے مشرق کی طرف ہوتا ہے اس لیے خط استواء پر طریق الشمس کا صعودی عقدہ ♈ ہے اور نزولی عقدہ ♎۔

چونکہ راس الحمل علم ہیئت میں اس قدر غیر معمولی اہمیت رکھتا ہے اسلیے اس کا ذکر کر دینا مناسب ہے کہ اس جملہ میں لفظ "حمل" کی اہمیت محض تاریخی ہے اس میں شک نہیں کہ ایک زمانہ میں وہ عقدہ جس میں سے سورج بوقت اعتدال ربیع گذرا کرتا تھا برج حمل میں واقع تھا لیکن اب ایسا نہیں ہے۔ ہم استقبال (Precession) کے باب (آٹھویں) میں دیکھینگے کہ گو طریق الشمس کا مستوی فضاء میں صرف قدرے ہٹتا ہے لیکن خط استواء کا مستوی اس طرح گردش کرتا ہے کہ طریق الشمس کے ساتھ اس کا نقطہ تقاطع اس دائرہ (طریق الشمس) پر منفی سمت میں تقریباً ۵۰″ سالانہ کی شرح سے حرکت کرتا ہے حالانکہ طریق الشمس کے ساتھ وہ تقریباً مستقل زاویہ بناتا ہے۔ پس صرف اس وجہ سے ہی آسمان کے بڑے حصہ میں کسی جرم فلکی کا ص۔ مد ہمیشہ بڑھتا رہتا ہے۔

♈ کا موجودہ محل تقریبی طور پر اس طرح دکھایا جا سکتا ہے۔ جب فرس (Pegasus) کا بڑا مربع جنوب کی طرف ہو تو اپنے ذہن میں خیال کرو کہ

اس کا بایاں انتصابی ضلع نیچے کی طرف اس کے اپنے طول کے مساوی خارج کیا گیا ہے۔ اس طرح جو نقطہ حاصل ہو اس کی دائیں طرف ایک خط کھینچو جو مربع کے نچلے افقی ضلع کے متوازی اور اس سے طول کا ایک چوتھائی ہو۔ یہ خط ایسے نقطہ پر ختم ہوگا جو راس الحمل کے موجودہ محل کے بہت ہی قریب واقع ہے۔

(۸۵) شکل (۲۵) میں ♈ ھ ھَ خط استوا ہے، ♈ ک کَ طریق الشمس ہے، ق اور قَ علی الترتیب استوا کے قطب اور ضد قطب ہیں اور ط طَ علی الترتیب طریق الشمس کے قطب اور ضد قطب ہیں۔ ♈ ک پر کے تیر سے سورج کی ظاہری حرکت کی سمت (بلحاظ ستاروں کے) دکھائی گئی ہے۔ ♈ ھ پر کے تیر سے وہ سمت دکھائی گئی ہے جس میں صعود مستقیم کی پیمائش عمل میں آتی ہے۔

شکل (۲۵)

بڑا دائرہ ھ ک ھَ کَ دائرہ انقلابین (Solstitial Colure) کے طور پر مشہور ہے اور ک، کَ وہ نقطے ہیں جن پر سورج بالترتیب انقلاب گرما اور انقلاب سرما کے وقت پایا جاتا ہے۔ ق، ♈، ♎ میں سے

گذرنے والے بڑے دائرہ کو دائرہ اعتدالین (Equinoctial Colure) کہتے ہیں۔
خط استواء اور طریق الشمس کے درمیان میلان کو بالعموم طریق الشمس کا میلان (Obliquity) کہتے ہیں۔ طریق الشمس کے میلان کی اوسط قیمت جو ایفیمرس بابتہ ۱۹۰۹ء میں دی گئی ہے ۲۳° ۲۷َ ۴ً ۴۰ ہے۔ اس میں کیو (Nutation) کی باعث قدرے عارضی کمی و بیشی ہوتی ہے (دیکھو آٹھواں باب) اور نیز اس میں خفیف مسلسل تنزل ۸۴ء ۴۶ً فی صد سال کی شرح سے عمل میں آتا ہے۔

مثال ۱ — اگر کرہ سماوی پر ایک نقطہ کا صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہو تو ثابت کرو کہ اس کرہ پر بعض خاص نقطوں کے لیے (شکل ۲۵) عہ، ضہ کی قیمتیں حسب ذیل ہیں جہاں سہ طریق الشمس کا میلان ہے:-

	عہ	ضہ		عہ	ضہ
ہ	۹۰°	۰	ق	؟	۹۰°
ہَ	۲۷۰°	۰	قَ	؟	-۹۰°
ک	۹۰°	سہ	ط	۲۷۰°	۹۰°-سہ
کَ	۲۷۰°	-سہ	طَ	۹۰°	۹۰°-سہ
♈	۰	۰	♎	۱۸۰°	۰

مثال ۲ — ثابت کرو کہ سورج کا صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہمیشہ مساوات

$$\text{مس ضہ} = \text{مس سہ جب عہ}$$

سے مربوط ہوتے ہیں۔

مثال ۳ — بتاریخ ۹ مئی ۱۹۱۱ء سورج کا صعود مستقیم ۳ٹ ۵ دق ۳۰ث ہے اور طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۷َ ہے۔ ثابت کرو کہ سورج کا میل +۱۷° ۵َ ۱۱ً ہے۔

۳۲ — ساعتی زاویہ اور کوکبی یوم — بعض اوقات اس میں

L Hour ang

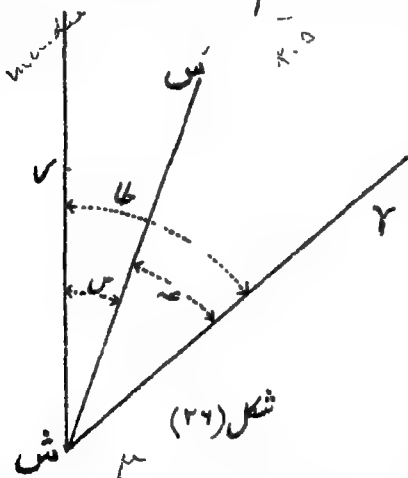
سہولت ہوتی ہے کہ مبداء کو جہاں سے خط استواء پر محددوں کی پیمائش عمل میں آتی ہے، اس نقطہ پر لیا جائے جو افق کے اوپر خط استواء اور مشاہد کے نصف النہار کا نقطہ تقاطع ہے ۔ یومی حرکت کی باعث جو نصف النہار کو ایک کوکبی یوم کے عرصہ میں کرہ سماوی کے گرد پھراتی ہے یہ مبداء کرہ سماوی پر ثابت نقطہ نہیں ہے بلکہ وہ خط استواء پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور اپنی گردش ایک کوکبی یوم میں مکمل کرتا ہے ۔ اس لیے اگر کوئی جرم فلکی کرہ سماوی پر ثابت ہو تو اس کا ایک محدد جس کی پیمائش اس متحرک مبدا سے عمل میں آئی ہو وقت کے ساتھ ضرور بدلنا چاہئیے ۔ اگر ایک بڑا دائرہ جسے ساعتی دائرہ کہتے ہیں قطب سے کسی ستارہ تک کھینچا جائے تو وہ زاویہ جو یہ ساعتی دائرہ نصف النہار کے ساتھ بنائے ساعتی زاویہ کہلاتا ہے ۔ اس طرح کسی ستارہ کا ساعتی زاویہ اور اس کا میل (اس کا قطبی فاصلہ) محددوں کا ایک نظام بناتے ہیں جو اکثر سہولت کا باعث ہوتے ہیں ۔

کسی جرم فلکی کا میل یومی حرکت کی وجہ سے تبدیل نہیں ہوتا ۔ لیکن اسکا ساعتی زاویہ برابر بدلتا رہتا ہے ۔ چونکہ ستارہ بالائی تکبد سے مغربی جانب حرکت کرتا نظر آتا ہے اس لیے ہم ساعتی زاویہ کی پیمائش نصف النہار سے مغربی جانب کریں گے ۔ پس ساعتی زاویہ صفر ہوگا جب جرم بالائی تکبد پر ہو اور بتدریج ۱۸۰° تک بڑھے گا جیسے جیسے جرم زیرین تکبد تک سفر کریگا اس کے بعد وہ مسلسل بڑھتا رہے گا تاآنکہ وہ پھر بالائی تکبد پر آکر ۳۶۰° ہو جائے اس لیے نصف النہار کی مغربی جانب ساعتی زاویہ ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان ہوتا ہے ۔ نصف النہار کی مشرقی جانب ساعتی زاویہ ۱۸۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ہوتا ہے ۔ پس اس قرارداد کی بموجب ساعتی زاوے ہمیشہ بڑھتے ہیں اور چونکہ کسی زاویہ میں ۳۶۰° جمع یا تفریق کئے جا سکتے ہیں جبکہ یہ زاویہ مثلثی تفاعل میں استعمال ہوا اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ سب ساعتی زاوے -۱۸۰° اور +۱۸۰° کے درمیان واقع ہوتے ہیں اور یہ کہ مغربی جانب ساعتی زاوئے مثبت ہوتے ہیں اور مشرقی جانب منفی ۔

ساعتی زاویہ (برخلاف میل کے) مشاہد کے مقام کے ساتھ بدلتا ہے۔
مثلاً جب کوئی ستارہ بمقام گرینوچ نصف النہار کو عبور کر رہا ہو تو اس کا ساعتی زاویہ وہاں صفر ہے۔ لیکن اسی آن پر یہ ستارہ مشرقی مقامات کے نصف النہاروں کو عبور کر چکا ہوگا اور اس لیے ایسے مقامات پر اس سے مغربی ساعتی زاویوں کا اظہار ہوگا۔ اس مقام پر جہاں طول بلد گرینوچ کے مشرق میں ۲ گھنٹے ہے ستارہ کا ساعتی زاویہ دو گھنٹے مغرب نظر آئے گا حالانکہ اسی آن پر گرینوچ کے مشاہد کو یہ ستارہ نصف النہار پر نظر آئے گا۔ (۸۷)
زیادہ عام طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو مقامات پر جن کے مشرقی طول بلد علی الترتیب ل اور لَ ہیں ایک ہی جرم کے ساعتی زاوئے (مغربی) ایک ہی آن پر ط اور ط + لَ - ل ہوں گے ۔
کسی منتخبہ نصف النہار پر راس الحمل کے دو متصل مروروں کے درمیان وقت کا جو وقفہ ہوتا ہے اس کو "کوکبی یوم" کہتے ہیں ۔ اگر ہم یہ یاد رکھیں کہ ستارے کرۂ سماوی پہ عملاً ثابت ہیں اور اگر ہم بعض چھوٹی بے قاعدگیوں کو فی الحال نظر انداز کریں تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ نصف النہار پر ایک ہی ستارہ کے دو متصلہ مروروں کے درمیان وقت کا وقفہ کوکبی یوم ہے ۔ نیز کوکبی یوم کی تعریف تمام علمی مقاصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ یوں بھی کی جا سکتی ہے کہ یہ وہ وقفہ ہے جس میں زمین اپنے محور کے گرد ایک مکمل گردش کر لیتی ہے (دیکھو دفعہ ۲۸) ۔ اگر اسے اوسط شمسی وقت میں بیان کیا جائے تو کوکبی یوم ۲۳ گ ۵۶ م ۴ ث ۰۹۰۶ کا ہوتا ہے ۔
شمسی یوم کی طرح کوکبی یوم بھی ۲۴ مساوی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور ان وقفوں کو کوکبی گھنٹے کہتے ہیں ۔ کوکبی گھنٹہ ۶۰ منٹوں (دقیقوں) میں تقسیم ہوتا ہے اور ہر منٹ ۶۰ ثانیوں میں ۔
کسی ستارہ کے مرور کے بعد کوکبی وقت کے ایک گھنٹہ میں اس کا ساعتی زاویہ درجوں میں پیمائش کردہ °۱۵ ہوگا ۔ یہ محیط کا ۲۴ واں حصہ ہے ۔
ساعتی زاویہ کو درجوں میں بیان کرنے کی بجائے کوکبی وقت میں بیان کرنے کا

دستور ہے ۔ مثلاً اگر ستارہ کو نصف النہار سے گذرے تین گھنٹے (کوکبی) ہو گئے ہوں اور اگر ستارہ اور خط استوا کے درمیان اس ثانوی دائرہ کا مقطوعہ ۲۵° ہو جو قطب سے خط استوا تک ستارہ میں سے گذرتا ہوا کھینچا گیا ہے تو ہم اس مخصوص مقام اور اس مخصوص آن پر ستارہ کے محل کو یہ کہہ کر متعین کر سکتے ہیں کہ اس کا مغربی ساعتی زاویہ تین گھنٹے اور اس کا شمالی میل ۲۵° ہے ۔

ساعتی زاویہ کو جو راس الحمل سے مغربی جانب ہو ۱۵° فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تبدیل کریں تو کوکبی وقت حاصل ہوگا ۔ جب راس الحمل نصف النہار پر بالائی تکبد میں ہو تو کوکبی وقت ' گ ۰ ۔ ۰ ۔ ش ' ہوتا ہے ۔ نصف النہار سے گذر جانے کے بعد راس الحمل کا ساعتی زاویہ ۱۵° ہو جائے تو کوکبی وقت ایک گھنٹہ ہوتا ہے اور اگر اسے نصف النہار سے گذرے اتنی دیر ہوئی ہو کہ اس کا ساعتی زاویہ ۲۸۵° ہو تو کوکبی وقت ۱۹ گھنٹے ہو گا ۔ (۴۸)

فرض کرو کہ ایک ستارہ س کا صعود مستقیم وقت میں بیان کردہ ع ہے اور فرض کرو کہ ساعتی زاویہ مغربی س ہے اور کوکبی وقت طا ہے ۔

فرض کرو کہ ش ر نصف النہار ہے (شکل ۲۶) اور ش ۲ دائرہ اعتدالین تو کوکبی وقت طا حسب تعریف بالا زاویہ ۲ ش ر سے ناپا جاتا ہے ۔ س کا صعود مستقیم ۲ ش س ہے اور علامت کے متعلق کوئی ابہام نہیں ہو سکتا کیونکہ ش ' خط استوا کا قطب ہے اور صعود مستقیم دائرہ اعتدالین سے مثبت سمت میں ناپا جاتا ہے ۔ نیز ر ش س ' س کا ساعتی زاویہ ہے ۔ اس لیے

شکل (۲۶)

س = طا - ع

اِس طرح ہمیں ایک اہم رشتہ حاصل ہوتا ہے جو کسی جرم کے ساعتی زاویہ اور صعود مستقیم کو کوکبی وقت کے ساتھ مربوط کرتا ہے ۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ اگر کسی ستارہ کا صعود مستقیم معلوم ہو تو اس کا ساعتی زاویہ ناپ کر کوکبی وقت معلوم کیا جا سکتا ہے ۔

مثال ۲ ۔ اگر ایک ستارہ کا ساعتی زاویہ مشرقی ۹۸° ۱۱' ۱۵" ہو اور اس کا صعود مستقیم ۲۱گ ۹م ۲۳ث ہو تو ثابت کرو کہ کوکبی وقت ۱۴گ ۳۶م ۳۸ث ہے ۔

ساعتی زاویہ مغربی ہے ۳۶۰° ـ (۹۸° ۱۱' ۱۵") = ۲۶۱° ۴۸' ۴۵" اسلیے اسے ۱۵° فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تبدیل کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے ۱۷گ ۲۷م ۱۵ث اس لیے

طا = ع + س = ۳۸گ ۳۶م ۳۸ث = ۱۴گ ۳۶م ۳۸ث

کیونکہ ۲۴گ کو ہمیشہ خارج کیا جا سکتا ہے ۔

مثال ۳ ۔ اگر طہ ساعتی زاویہ ہو جس کی پیمائش درجوں میں ہوئی ہے تو ثابت کرو کہ اس زاویہ کا دائری ناپ ۲ π طہ \ ۳۶۰° ہے ۔

مثال ۴ ۔ اگر کسی ساعتی زاویہ میں گھنٹوں کی تعداد ت ہو تو ثابت کرو کہ اس زاویہ کا دائری ناپ π ت \ ۱۲ ہے ۔

مثال ۵ ۔ شمالی عرض بلد فہ کے کسی مقام پر اسمت ا کے ایک انتصابی دائرہ پر کسی ستارہ کے ایک مرور اور دوسرے انتصابی دائرہ پر جو نصف النہار کے ساتھ وہی زاویہ بنائے ایک مرور کے درمیان جو وقفہ ہوتا ہے وہ سب ستاروں کے لیے وہی ہوتا ہے اور ایک کوکبی یوم کے ممᐟ (جیب فہ مس ا) \ π کے مساوی ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ ش (شکل ۲۷) قطب سماوی، راس ر ہے، ر پ اور ر ق مفروضہ انتصابی دائرے ہیں، ش ج اور ش ق بڑے دائرے ہیں جو انتصابی دائروں پر عمود ہیں، پ۱ اور پ۲ وہ نقطے ہیں جن پر کوئی دیا ہوا ستارہ ر پ کو عبور کرتا ہے اور ق۱، ق۲ وہ نقطے ہیں جن پر

(۸۹)

یہ ستارہ ر ق کو عبور کرتا ہے۔ اب تشاکل سے

زاویہ پ₁ ش پ = زاویہ پ ش پ₂ = زاویہ ق₁ ش ق = زاویہ ق ش ق₂

اور اس لیے

زاویہ پ₁ ش ق₁ = زاویہ پ₂ ش ق₂ = زاویہ پ ش ق

اور اس لیے یہ منتخبہ ستارہ پر منحصر نہیں ہے۔

شکل (۲۷)

نیز مم پ ش ر = جب فہ مس ا اور مطلوبہ وقفہ کو کبی یوم کا

مم⁻¹ (جب فہ مس ا) \ π

ہے۔

مثال ۶۔ اگر عرض بلد فہ کے ایک مقام پر ستاروں کا ایک زوج جن کے محدد علی الترتیب عہ، ضہ اور عہَ، ضہَ ہیں کبھی ایک ہی انتصابی دائرہ پر آجائے تو ثابت کرو کہ

جم فہ > جم ضہ جم ضہَ جب (عہ - عہَ) قم طہ

جہاں طہ وہ قوس ہے جو ان ستاروں کو ملاتی ہے۔

فرض کرو کہ یہ دو ستارے س، سَ (شکل ۲۸) ہیں۔ تب مثلث

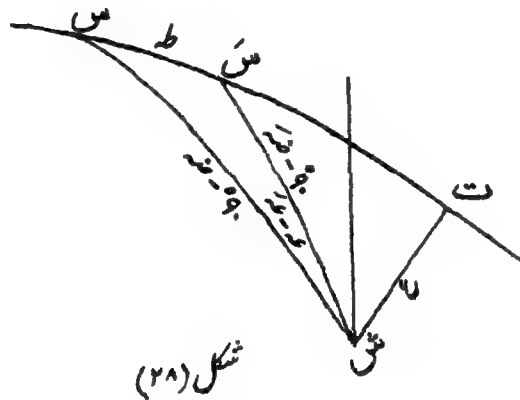
س ش س َ، ش کے گرد گردش کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ش ت (= ع) س س َ پر عمود ہے۔ تو بڑے دائرہ س س َ پر کے کسی نقطہ کا ش سے فاصلہ ع سے کم نہیں ہو سکتا۔ لیکن اگر س، س َ ایک ہی انتصابی دائرہ پر ہوں تو یہ قوس راس میں سے گذرنی چاہئے۔ اس لیے ۹۰° - فہ > ع یا جم فہ > جب ع۔ لیکن جم ضہ جب ش س س َ = جب ع اور جب ش س س َ جب ط = جم ضہ َ جب (عہ - عہ َ) اس لیے

جب ع = جم ضہ جم ضہ َ جب (عہ - عہ َ) قم ط

شکل (۲۸)

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ شمسی وقت کے ۲گ ۲۳م ۲۴ء۹۲ش کوکبی وقت کے ۲گ ۲۳م ۴۸ء۸۴ش کے معادل ہیں اور یہ کہ کوکبی وقت کے ۱۵گ، اوسط شمسی وقت میں تبدیل ہو جائیں گے اگر ۲م ۲۷ء۴۴ش تفریق کئے جائیں۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ ۳۶۵ء۱۴ کوکبی دن بہت تقریبی طور پر ۳۶۴ء۱۴ اوسط شمسی دنوں کے برابر ہوتے ہیں۔

(۹۰) **۳۴۔ ساعتی زاویہ اور میل سے راسی فاصلہ اور السمت کی تعیین۔** مطلوبہ ضابطے محددوں کے استحالہ کی عام مساواتوں سے

لکھے لیے جا سکتے ہیں۔ اس قرارداد کی بموجب کہ السمت کی پیمائش نقطۂ شمالی سے عمل میں آنی چاہیئے (دفعہ ۳) السمت ا ایسی سمت میں لیا جاتا ہے کہ قدم اُفق کا شطب ہو جب اسے (اُفق) ایک بڑا دائرہ سمجھا جائے جس کی درجہ بندی السمت کی پیمائش کے لیے عمل میں آئی ہو۔ بلا شبہ قطب شمالی خط استواء کا شطب ہے جبکہ اس کی درجہ بندی صعود مستقیم کی پیمائش کے لیے کی گئی ہو۔ شطب کی تعریف سے (دفعہ ۶) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر دو درجہ دار بڑے دائروں لَ اور لؔ کے شطب شؔ اور شَ ہوں تو شؔ شَ (یا ۱۸۰°) کا شطب لَ پر لؔ کا صعودی عقدہ ہے اور شَ شؔ (یا ۱۸۰°) کا شطب لؔ پر لَ کا صعودی عقدہ ہے۔ اس طرح خط استواء پر اُفق کا صعودی عقدہ وہ نقطہ ہوگا جو مغربی جانب ہے اور اس لیے قہَ یعنی اس صعودی عقدہ کا السمت ۲۷۰° ہے جبکہ اس کی پیمائش نقطہ شمالی کو مبداء مان کر عمل میں آئے۔ کوکبی وقت طا وہ ساعتی زاویہ ہے جس قدر ۷ نصف النہار کے مغرب میں ہے۔ اس لیے اس سمت کو ذہن میں رکھنے سے جس میں صعود مستقیم کی پیمائش کی جاتی ہے خط استواء پر اُفق کے صعودی عقدہ کا صعود مستقیم قہ ۲۷۰° + طا کے مساوی حاصل ہونا چاہیئے۔ اُفق اور خط اُستواء کے درمیان زاویہ ۹۰° + فہ ہے کیونکہ یہ وہ زاویہ ہے جو ان کے شطبوں کے درمیان ہے۔ آخر الامر چونکہ راس اُفق کا ضد شطب ہے اس لیے ضہ منفی ہے اور ی - ۹۰° کے مساوی ہے جہاں ی راسی فاصلہ ہے۔ دفعہ ۱۲ (۹۱) کے ضابطوں (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) میں ضروری اندراجات عمل میں لانے سے مطلوبہ مساواتیں

- جب ا جب ی = جم ضہ جب (طا - عہ)
جم ا جب ی = جم فہ جب ضہ - جب فہ جم ضہ جم (طا - عہ)　} ... (۱)
جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم (طا - عہ)

اور ان کے مماثل حسب ذیل مساواتیں

- جب (طا - عہ) جم ضہ = جب ا جب ی
جم (طا - عہ) جم ضہ = جم فہ جم ی - جب فہ جم ا جب ی ...(۲)
جب ضہ = جب فہ جم ی + جم فہ جم ا جب ی

حاصل ہوتی ہیں -

مساواتوں (آ) سے ہم راسی فاصلہ اور السمت محسوب کر سکتے ہیں جبکہ میل اور ساعتی زاویہ (طا - عہ) معلوم ہوں، اور اس کے بالعکس مساواتوں (۲) سے ہم میل اور ساعتی زاویہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ راسی فاصلہ اور السمت معلوم ہوں -

اگر ساعتی زاویہ اور میل معلوم ہوں تو راسی فاصلہ کی تعیین کے لیے حسب ذیل طریقہ بہت سہولت بخش ہے - وہ زاویہ جو ستارہ پر اس قوس کے محاذی بنتا ہے جو راس اور قطب کو ملاتی ہے اختلاف منظری زاویہ (Parallactic angle) کہلاتا ہے - ہم اسے عا سے تعبیر کریں گے - اب اسکی تعیین کے لیے دفعہ (۱) کی بنیادی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں جن میں ساعتی زاویہ (طا - عہ) کی بجائے س لکھا گیا ہے:

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س
جب عا جب ی = جم فہ جب س ...(۳)
جم عا جب ی = جب فہ جم ضہ - جم فہ جب ضہ جم س

اگر س اور ضہ معلوم ہوں تو اختلاف منظری زاویہ عا اور راسی فاصلہ ی دونوں، ان مساواتوں سے معلوم کئے جا سکتے ہیں - چونکہ جب ی اور جم فہ دونوں ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں اس لیے دوسری مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عا اور س کی ایک ہی علامت ہے - یہ دونوں نصف النہار کے مغرب میں مثبت ہیں اور نصف النہار کے مشرق میں منفی -

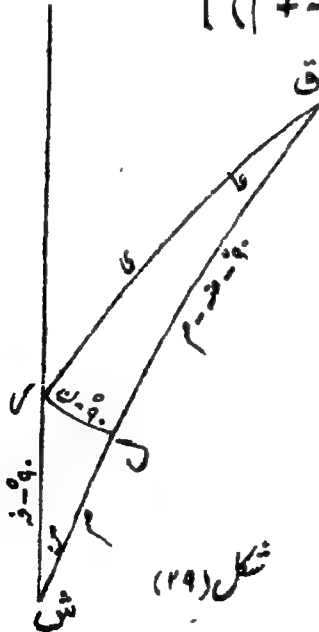
اکثر اس امر میں سہولت ہوتی ہے کہ ان اعمال حساب کو ذیلی مقداروں کی مدد سے مکمل کیا جائے - ہم دو نئی مقداریں م اور ن، شرطوں

جم ن = جم فہ جب س
جب ن جم م = جب فہ .... (۴)
جب ن جب م = جم فہ جم س

کے ذریعہ داخل کرتے ہیں۔ اگر م اور ن کی قیمتوں کا ایک زوج ن، م. ان مساواتوں کو پورا کرے تو یہ مساواتیں ۳۶۰° - ن. اور ۱۸۰° + م سے بھی پوری ہوں گی۔ اس لیے کوئی ہرج نہ ہوگا اگر ہم آیندہ عمل میں ن، م. استعمال کریں یا ۳۶۰° - ن، ۱۸۰° + م. استعمال کریں۔ ان دو زوجوں میں سے کسی ایک کو ن، م کے طور پر لو تو (۳) میں اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے (۹۲)

جم ی = جب ن جب (ضہ + م)
جب عا جب ی = جم ن .... (۵)
جم عا جب ی = جب ن جم (ضہ + م)

ان مساواتوں کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

مس عا = مم ن قط (ضہ + م)
مس ی = قط عا مم (ضہ + م) .... (۶)

ان میں سے پہلی مساوات سے عا معلوم ہوتا ہے اور پھر دوسری مساوات سے ی ملتا ہے۔ اس میں شک نہیں کہ ی کو مساواتوں (۵) میں سے پہلی مساوات سے بھی معلوم کیا جا سکتا ہے لیکن ہمیشہ یہ امر قابل ترجیح ہے کہ کسی زاویے کو اسکی جیب التمام سے معلوم کرنے کی بجائے اس کے

شکل (۲۹)

مماس سے معلوم کیا جائے (دفعہ ۳)۔
ضوابط (۴) اور (۵) ہندسی طور پر فوراً حاصل کئے جا سکتے ہیں۔
کیونکہ اگر ر ل، ش ق پر عمود ہو (شکل ۲۹) تو ش ل = م اور
ر ل = ۹۰° - ن

مساواتوں (۴) سے یہ واضح ہے کہ ن اور م چونکہ صرف عرض بلد اور ساعتی زاویے پر منحصر ہوتے ہیں اس لیے وہ، سب میلوں کے ستاروں کے لیے وہی ہوتے ہیں۔ اس لیے کسی معلومہ رصدگاہ کے لیے یا زیادہ صحیح طور پر کسی دیے ہوئے عرض بلد کے لیے ایک مرتبہ ایک جدول کا تیار کر لینا سہولت بخش ہوتا ہے جس سے اس عرض بلد پر کے کسی مقام کے لیے ہر مخصوص ساعتی زاویہ کے جواب میں م اور ل مم ن کی قیمتیں فوراً حاصل کیجا سکتی ہیں۔

مثال ۱ — اس امر کی تصدیق کرو کہ مساواتوں

جس عا = مم ن قط (ضہ + م) اور جس ی = قط عا م (ضہ + م)

میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جبکہ م اور ن کو علی الترتیب ۱۸۰° + م اور ۳۶۰° - ن میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

مثال ۲ — ستارہ ۶۱ دجاجہ (61 Cygni) کا راسی فاصلہ اور اختلاف منظری زاویہ معلوم کرو جبکہ وہ نصف النہار سے ۳ گ م پر ہو۔ اس کا میل + ۳۸° ۹َ ہے اور مشاہد کا عرض بلد ۵۳° ۲۳َ ہے۔

مساواتوں (۴) سے ہم معلوم کرتے ہیں م = ۲۰° ۳ ۴َ اور ل مم ن = ۹۱۲۶۶۷۶ (ن) اس لیے ضہ + م = ۶۵° ۵۲َ اور (۶) سے عا = ۸° ۱۴َ،
ی = ۳۴° ۱۰َ

(۹۳) ۳۵ — تفرقی ضابطوں کے اطلاقات۔

فرض کرو کہ قطب ش، ستارہ ق، اور راس ر کو ملانے سے ایک مثلث ش ق ر حاصل کیا گیا ہے (شکل ۲۹)۔ اس مثلث پر دفعہ (۴) کے بنیادی ضابطے استعمال کرنے سے جو چھ تفرقی ضابطے حاصل ہوتے ہیں

ان کا ایک ساتھ لکھ لینا سہولت بخش ہے۔ قوس ش ق قطبی فاصلہ ہے جو
۹۰ - ضہ کے مساوی ہے، عرض التمام ش ر ہے یعنے ۹۰ - فہ، ق ش کا
راسی فاصلہ ی ہے اور عرض بلد ۹۰ - ی ہے۔ اختلاف مشرقی زاویہ
عا، ق پر ہے۔ یہ زاویہ مثبت ہے کیونکہ وہ، نصف النہار کے مغرب
میں ہے۔ ساعتی زاویہ س، طا - عہ کے مساوی ہے جہاں طا، ستارہ
کا کوکبی وقت ہے اور عہ، ستارہ کا صعود مستقیم ہے۔ اسمت ا، شمال
سے مشرق کی طرف ناپا جاتا ہے اور اس لیے ق ر ش، ۳۶۰ - ا ہے۔

دفعہ ۴ کے چھ تفرقی ضابطے جن میں سے صرف تین غیر تابع ہیں
ذیل کی شکلوں میں لکھے جا سکتے ہیں:

مف ضہ + جم عا مف ی - جم س مف فہ - جب س جم فہ مف ا = ۰ ...(۱)

مف ی + جم ا مف فہ + جم عا مف ضہ + جم فہ جب ا مف س = ۰ ...(۲)

مف فہ + جم ا مف ی - جم س مف ضہ + جم ضہ جب س مف عا = ۰ ...(۳)

مف ا - جم ی مف عا - جب فہ مف س - جب س جم فہ مف ضہ = ۰ ...(۴)

مف س + جب ضہ مف عا - جب فہ مف ا - جب عا جم ضہ مف ی = ۰ ...(۵)

مف عا - جم ی مف ا + جب ضہ مف س - جب ا جب ی مف فہ = ۰ ...(۶)

مثلث کے چھ عنصروں میں سے چار چار عنصروں کے اجتماعات پندرہ ہو سکتے
ہیں۔ چار کا ہر ایک جٹ ایک مساوات سے مربوط ہوتا ہے (دفعہ ۱)۔
اکثر صورتوں میں جہاں عنصروں کے تغیرات مطلوب ہوتے ہیں دو عنصر مستقل
رہتے ہیں اور باقی دو عنصروں کے اضافی تغیرات معلوم کرنے ہوتے ہیں۔ اسلیے
ہم ان پندرہ مساواتوں میں سے وہ مساوات منتخب کرتے ہیں جس میں وہ
دو عناصر جو مستقل ہیں اور وہ دو عناصر جن کے اضافی تغیر مطلوب ہیں شامل
ہوں۔ اگر اس مساوات کو ان دو متغیروں کے لحاظ سے تفرق کیا جائے تو
مطلوب نسبت مل جاتی ہے۔

مثلاً ہم وہ صورت لیتے ہیں جو اکثر عرض بلد کی تعیین میں پیش ہوتی
ہے جبکہ کسی ستارہ کے راسی فاصلہ کا مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک

ستارہ کا ساعتی زاویہ اور میل صحت کے ساتھ ہمیں معلوم ہیں لیکن مفروضہ راسی فاصلہ میں خطا مف ی ہے۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ محسوبہ عرض بلد میں کیا خطا واقع ہوگی کیونکہ خطادار راسی فاصلہ' صحیح ساعتی زاویہ اور میل کے ساتھ استعمال ہوا ہے ۔ یہاں چار متعلقہ مقداریں س' ضہ' ی' فہ ہیں (۹۴) اور اس لیے ضابطہ ہے

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س

تفرق کرنے اور س اور ضہ کو مستقل فرض کرنے سے

- جب ی مف ی = (جم فہ جب ضہ - جب فہ جم ضہ جم س) مف فہ

اور مف فہ کے سر کی بجائے جب ی جم ا درج کرنے سے

مف فہ = - قط ا مف ی

بلا شبہ اسے مندرجۂ صدر ضابطہ (۲) سے راست' مف ضہ = ۰' مف س = ۰ بناکر حاصل کیا جاسکتا تھا ۔

دوسری مثال میں فرض کرو کہ اختلاف منظری زاویہ عا شامل ہوتا ہے۔ ہم یہ معلوم کریں گے کہ ایک دئے ہوئے ستارہ کا اختلاف منظری زاویہ عا یومی حرکت کی اثناء میں کس وقت اعظم ہوتا ہے ۔ شرطیں یہ ہیں کہ فہ اور ضہ مستقل ہوں اور س' ی اور ا اس طریقہ سے متغیر ہوں کہ عا میں کوئی تبدیلی نہ ہونے پائے یعنی مف عا معدوم ہونا چاہئے ۔ فہ' ضہ' عا' س پر مشتمل ضابطہ یہ ہے

مس فہ جم ضہ = مم عا جب س + جب ضہ جم س

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(مم عا جم س - جب ضہ جب س) مف س = ۰

اور چونکہ مف س کے سر کو معدوم ہونا چاہئے اس لیے مم عا = جب ضہ مس س جس سے جم ا = ۰ اور اس لیے ستارہ اول السمت پر ہونا چاہئے ۔

اس میں ہمیں ان استثنائی صورتوں کی ایک اور مثال ملتی ہے جن میں اگرچہ تین تغیرات صفر ہوتے ہیں لیکن ضابطوں سے یہ لازم نہیں آتا کہ

دوسرے تین تغیر بھی صفر ہوں (دفعہ ۴) ۔

یہ تفرقی ضابطے خاص کر یہ دکھانے میں سبق آموز ہیں کہ مشاہدات کو کس طرح مرتب کرنا چاہیے کہ اگرچہ اثنائے مشاہدہ میں ایک چھوٹی خطا واقع ہوئی ہے لیکن اس خطا کے وجود سے اس نتیجہ پر کم سے کم اثر پڑے جس کی ہمیں تلاش ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ملاح اپنا وقت پیما ٹھیک کرنے کی غرض سے سورج کا ساعتی زاویہ معلوم کرنا چاہتا ہے۔ جس چیز کی وہ پیمائش کرتا ہے وہ سورج کا ارتفاع ہے۔ لیکن انعطاف اور دوسرے اسباب ہے جنہیں کوئی تدبیر کلاً رفع نہیں کر سکتی اس ارتفاع میں ایک چھوٹی خطا واقع ہوگی اور اس لیے راسی فاصلہ کے محسوب کرنے میں خطا واقع ہوگی۔ مشاہد راسی فاصلہ کو ی کے طور پر پیمائش کر لیتا ہے اور پھر نتیجہ نکالتا ہے کہ ساعتی زاویہ س ہے۔ لیکن صحیح راسی فاصلہ ی + مف ی ہے یعنے مف ی وہ مقدار ہے جسے مشاہدہ کردہ راسی (۹۵) فاصلہ میں جمع کرنا ہوگا تاکہ صحیح راسی فاصلہ حاصل ہو۔ اس لیے صحیح ساعتی زاویہ س نہیں ہے بلکہ قدرے مختلف مقدار س + مف س ہے جہاں مف س وہ تصحیح ہے جو س پر استعمال کرنی ہوگی پس مف س وہ مقدار ہے جس کی اب تلاش ہے۔

وہ ضابطہ جس میں صرف اجزا ی، فہ، ضہ، س شامل ہوتے ہیں یہ ہے

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س

اس کو تفرق کرنے اور فہ اور ضہ کو مستقل سمجھنے سے

۔ جب ی مف ی = ۔ جم فہ جم ضہ جب س مف س

اور ۔ جب ا جب ی = جب س جم ضہ درج کرنے سے

۔ مف ی = جب ا جم فہ مف س

اس لیے مف س = ۔ قط فہ قم ا مف ی

اس ضابطہ کا ہندسی ثبوت حسب ذیل ہے :۔

اگر سورج ا قطب مش کے گرد (شکل ۴۰) پ سے پ' تک

حرکت کرے تو پ پَ چونکہ ایک چھوٹی قوس ہے اس لئے اس کا راسی فاصلہ س پ سے س پَ تک بدلتا ہے۔

شکل (۳۰)

اگر پ ت، س پَ پر عمود ہو تو مف ی = ت پَ۔ چونکہ زاویہ ش پ پَ اور زاویہ س پ ت دونوں ۹۰° ہیں، اس لیے زاویہ ت پ پَ = عا اور مف س جب ش پ = پ پَ = مف ی قم عا۔ اِس لیے اگر ش ک، س پَ پر عمود ہو تو حاصل ہونا چاہیئے مف ی = مف س جب ش ک جس سے ہمیں اس بات کا علم ہوتا ہے کہ وقت کے لحاظ سے سورج کے راسی فاصلہ کی شرح تبدیلی اُس عمود کی جیب کے متناسب ہے جو قطب سے اُس انتصابی دائرہ پر جو سورج میں سے گذرتا ہے کھینچا گیا ہو۔ نیز (۹۶)

جب ش ک = جب س ش جب (ا - ۱۸۰°) = - تجم فہ جب ا

جس سے حسب سابق

مف س = - قط فہ قم ا مف ی

پس مشاہدے کو ایسے وقت پر عمل میں لانا چاہیئے کہ قم ا اتنا چھوٹا ہو جتنا ممکن ہے کیونکہ ایسی صورت میں خطا مف ی، ساعتی زاویہ کی تعیین پر کم سے کم اثر انداز ہوگی۔ اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا کو ۹۰° یا ۲۷۰° کے قریب ہونا

چاہیئے۔ یہیں عملی قاعدہ جس سے ملاح خوب واقف ہوتے ہیں یہ ہے کہ وقت کی تعئین کے لیے سورج کا ارتفاع اُسوقت مُشاہدہ کیا جائے جبکہ سورج اول السمت پر یا اِس کے قریب ہو۔ اگر سورج اول السمت پر نہ آئے تو مف س / مف ی کی کم سے کم قیمت قط ضہ ہے۔

مثال ۱ — مف ضہ، مف ی، اور مف فہ کے لیے ضابطوں (۱) (۲)، (۳) کو حل کرکے معلوم کرو کہ ضابطے (۴)، (۵)، (۶) کس طرح اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

مثال ۲ — ہندسی طور پہ ثابت کرو کہ اگر سورج کا مفروضہ میل مف ضہ کی حد تک غلط ہو تو سورج کے راسی فاصلہ کے مُشاہدے سے ساعتی زاویے کی تعئین میں مفروضہ میل کی خطا سے جو خطا پیدا ہو گی وہ مم عا قط ضہ × مف ضہ ہوگی۔

مثال ۳ — کِن حالات کے تحت یومی حرکت کی باعث دن بھر ایک ستارہ کے راسی فاصلہ کی تبدیلی اِس کے ساعتی زاویے کی تبدیلی کے متناسب ہوگی۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے مف ی \ مف س = جب ا جم فہ اور یہ مستقل ہونا چاہیئے، اِس لیے ا مستقل ہونا چاہیئے اور اِس لیے مُشاہد خط استوا پر ہونا چاہیئے اور ستارہ ایک اُستوائی ستارہ ہونا چاہیئے۔

مثال ۴ — اگر معلومہ میل کے کسی جرم فلکی کا راسی فاصلہ مُشاہدہ کیا جائے اور اِس راسی فاصلہ سے ساعتی زاویہ متعین کیا جائے تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ مفروضہ عرض بلد فہ میں ایک چھوٹی خطا مف فہ کی موجودگی ساعتی زاویہ میں ۔مم ا قط فہ مف فہ کی خطا پیدا کرے گی جہاں ا اسمت ہے۔

نیز دکھاؤ کہ یہ خطا بالعموم غیر اہم ہوگی بشرطیکہ جرم اول السمت کے نزدیک ہو۔

قطبی فاصلہ ق س (= ۹۰° ـ ضہ)، راسی فاصلہ ر س (= ی) اور عرض التمام ق ر (= ۹۰° ـ ضہ) سے مثلث ق س ر حاصل ہوتا ہے۔ (شکل ۳۱) اختلاف منظری زاویہ عا منفی ہے کیونکہ وہ نصف النہار کے مشرق میں ہے (دفعہ ۳۴)۔

قطبی فاصلہ ق س (= ق سَ)، راسی فاصلہ ر س (= رَ سَ) اور عرض التمام ق رَ (= ۹۰° ـ فہ ـ مف فہ) سے مثلث ق سَ رَ حاصل ہوتا ہے۔

رَ مہ اور سَ ل، س ر پر عمود کھینچو تو چونکہ س ر اور سَ رَ بہت قریب ہیں اس لیے سَ رَ = ل مہ، لیکن چونکہ سَ رَ = س ر اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے س ل = ر مہ۔

زاویہ س ر رَ، السمت ا ہے، اس لیے س ل = ر مہ = جم ا مف فہ

زاویہ ق س ر = ۔عا اور س سَ = س ل قط (۹۰° + عا)

= + جم ا قم عا مف فہ

لیکن مف س = س سَ قم ق س، اس لیے (۹۷)

مف س = جم ا قم ق س قم عا مف فہ = ۔مم ا قط فہ مف فہ

شکل (۳۱)

مثال ۵۔ میل ضہ کے ایک ستارہ کے راسی فاصلے ی، ی۲ ایسے لمحوں پر مشاہدہ کئے گئے ہیں جن کے درمیان وقفہ ۲ تہ ہے۔ بتاؤ کہ عرض التمام ج، مساوات

جب ½ ج = جب ½ (ی + لا) جب ½ طہ قم صہ

سے معلوم ہو سکتا ہے، جہاں لا، د، ی، طہ، صہ امدادی زاویے ہیں جو مساواتوں

(۱) مس لا = مم ضہ جم تہ

(۲) جب د = جم ضہ جب تہ

(۳) جم ی = جم $\frac{1}{2}$ (ی۱ + ی۲) جم $\frac{1}{2}$ (ی۱ − ی۲) قط د

(۴) جب طہ = جب $\frac{1}{2}$ (ی۱ + ی۲) جب $\frac{1}{2}$ (ی۱ − ی۲) قم ی قم د

(۵) مس صہ = جب $\frac{1}{2}$ (ی + لا) قم $\frac{1}{2}$ (ی − لا) مس $\frac{1}{2}$ طہ

سے حاصل ہوتے ہیں ۔ [Math. Trip]

مثال ۶ ۔ اگر قطب تارے (Polaris) کا شمال قطبی فاصلہ ف اور راسی فاصلہ ی قطب کے نیچے نصف النہار سے ساعتی زاویہ س پر مشاہدہ کیے گیے ہوں تو ثابت کرو کہ عرض التمام ع مساواتوں

جب ما = جب ف جب س ، مس لا = مس ف جم س ،

مس۲ $\frac{1}{2}$ (ع + لا) = مس $\frac{1}{2}$ (ی + ما) مس $\frac{1}{2}$ (ی − ما)

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

امدادی زاویوں لا اور ما کی ہندسی اہمیت کیا ہے؟ [Math. Trip.]

مثال ۷ ۔ اگر ایک ستارہ کا میل ضہ اور اس کا اعظم السمت ا ہو تو ثابت کرو کہ اس لمحہ سے جبکہ السمت ا ہے وقت کے ت ثانیوں میں السمت بقدر قوس کے $\frac{1}{2}$ ۱۵۲ ت۲ جب ۱″ جب۲ ضہ مس ا ثانیوں کے بدل جائے گا ۔

اگر السمت کی قیمت اعظم ہو تو ستارہ قطب اور راس کے درمیان تکبدُّر کرے گا اور اعظم السمت کے لیے راسی فاصلہ اس چھوٹی قوس پر مماس ہوتا ہے جو ستارہ اپنی ظاہری یومی حرکت میں مرتسم کرتا ہے ۔

(۹۸) ۔ مم ا = جم فہ مس ضہ قم س ۔ جب فہ مم س کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

قم۲ ا $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر س}}$ = جم فہ مس ضہ قم س مم س − جب فہ قم۲ س

= ۔ مم ا مم س − جب فہ

پھر تفرق کرنے اور $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر س}}$ = ۰ بنانے سے

$$\text{قم}^{2}\ \text{ا}\ \frac{\text{فر}^{2}\ \text{ا}}{\text{فر س}^{2}} = \text{مم ا قم}^{2}\ \text{س}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^{2}\ \text{ا}}{\text{فر س}^{2}} = \text{س ا جب}^{2}\ \text{ضہ}$$

اِس لیے اعظم السمت کی آن سے ت ثانیوں میں السمت کی تبدیلی

لا ہو تو

$$\text{ا جب ا}' = \tfrac{1}{2}\ \text{۱۵}^{2}\ \text{ت}^{2}\ \text{جب}^{2}\ \text{ا}'\ \text{جب ا ضہ س ا}$$

۳۶۔ کسی جرم فلکی کے تکبُّد کا وقت۔

بالائی تکبُّد کے لمحہ پر (دفعہ ۲۹) جرم کا صعود مستقیم کوکبی وقت ہوتا ہے۔ اس لیے بالائی تکبُّد کا وقت معلوم کرنے کا مسئلہ اس مسئلہ میں تحویل ہو جاتا ہے کہ اس جرم کا صعود مستقیم اُس آن پر معلوم کیا جائے جبکہ وہ نصف النہار کو عبور کرتا ہے۔

ستارے کے بالائی تکبُّد کا وقت

کسی ستارے کی صورت میں عمل حساب بہت سادہ ہے کیونکہ ظاہری صعود مستقیم بہت سُست رفتار سے بدلتا ہے اور اس لئے ہم جدولوں سے دیکھ کر اسے ہمیشہ معلوم کر سکتے ہیں اور پھر بالائی تکبد کا کوکبی وقت فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم سماک رامح (Arcturus) کے مرور کا وقت بمقام گرینچ بتاریخ ۱۲ فروری سنہ ۱۹۰۶ء معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اس مخصوص مقصد کے لیے ۱۲ فروری کی ظاہری ظہر سے ۱۳ فروری کی ظاہری ظہر تک آسانی سے شمار کیا جا سکتا ہے۔ ایفیمرس بابتہ سنہ ۱۹۰۶ء میں ہم دیکھتے ہیں کہ ۱۰ فروری کو بالائی تکبُّد کے وقت صعود مستقیم ۱۴ گ ۱۱ م ۴۲ ث ۲۲ ہے۔ یہ صعود مستقیم ۱۰ دن میں ۲۹ ث بڑھتا ہے اور اس لیے ۱۲ فروری کو تکبد کے

وقت صعود مستقیم ۱۴گ ۱۱م ۴۸٫۲۲ش ہے۔ اُس دن اوسط ظہر پر کوکبی وقت ۲۱گ ۲۶م ۲۹٫۹۱ش ہے (دفعہ ۶۹)۔

اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ سماک رامح بتاریخ ۱۲، فروری سنہ ۱۹۰۶ء اوسط ظہر کے بعد کوکبی وقت

۲۴گ + (۱۴گ ۱۱م ۴۸٫۲۲ش) - (۲۱گ ۲۶م ۲۹٫۹۱ش) = ۱۶گ ۴۴م ۵۲٫۵۰ش

پر نصف النہار پر پہنچیگا۔ ہم اِس کوکبی وقت کو اوسط وقت میں جدولوں کے ذریعہ جو بحری جنتری میں دیجاتی ہیں تحویل کرتے ہیں، اِس طرح

۱۶گ	۱۵گ	۵۰م	۲۲٫۰۳ش
۴۴م		۴۳م	۵۲٫۷۹ش
۵۲ش			۵۱٫۸۶ش
٫۵۰			٫۵۰

۱۶گ ۴۲م ۹۵٫۰۷ش

اِس لیے سماک رامح کا تکبّد ۱۲، فروری سنہ ۱۹۰۶ء کو بوقت ۱۶گ ۴۲م ۹۵٫۰۷ش واقع ہوتا ہے۔

(۹۹) کسی متحرک جرم مثلاً سیارہ یا چاند کی صورت میں صعود مستقیم ساعت بہ ساعت تیزی سے بدلتا ہے۔ اِس کے تکبّد کا وقت معلوم کرنے کے لیے ہم حسب ذیل عمل کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ جرم کا صعود مستقیم تین متصل وقت کے وقفوں $ت_۱$، $ت_۲$، $ت_۳$ پر $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$ ہے۔ یہ وقت ایسے لگے گئے ہیں جن کے لیے محسوبہ قیمتیں جدولوں سے ملتی ہیں اور نیز ایسے کہ تکبّد $ت_۱$ اور $ت_۳$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اب مساوی وقفوں $ت_۲ - ت_۱$ یا $ت_۳ - ت_۲$ میں سے کسی ایک کو

وقت کی اکائی کے طور پر لو اور یہ فرض کرو کہ تکبُّد ' ت₁ کے بعد وقت کی ت اکائیوں پر واقع ہوتا ہے تو بینی ادراج کے ذریعہ تکبُّد کے وقت صعود مستقیم کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عم}_1 + \text{ت}\,(\text{عم}_2 - \text{عم}_1) + \frac{1}{2}\,\text{ت}\,(\text{ت} - 1)\,(\text{عم}_1 - 2\,\text{عم}_2 + \text{عم}_3)$$

یہ جرم کے تکبُّد کا کوکبی وقت ہوگا۔ فرض کرو کہ وقفہ ت_1 پر کوکبی وقت ط_1 ہے اور فرض کرو کہ کوکبی وقت میں مذکورۂ بالا اکائی کی قیمت ھ ہے۔ تب تکبد کی آن پر کوکبی وقت ہے

$$\text{ط}_1 + \text{ھ}\,\text{ت}$$

لیکن یہ اُس جملہ کے مساوی ہونا چاہیئے جو ابھی اوپر لکھا جا چکا ہے۔ اِس لیے

$$\text{ط}_1 + \text{ھ}\,\text{ت} = \text{عم}_1 + \text{ت}\,(\text{عم}_2 - \text{عم}_1) + \frac{1}{2}\,\text{ت}\,(\text{ت} - 1)\,(\text{عم}_1 - 2\,\text{عم}_2 + \text{عم}_3)$$

اِس مساوات سے ت معلوم کرنا ہوگا۔ مساوات دو درجی ہے لیکن ہمارے مطلب کی اہم اصل صریحاً اِس واقعہ سے ظاہر ہو جاتی ہے کہ $\frac{1}{2}\,\text{ت}\,(\text{ت} - 1)\,(\text{عم}_1 - 2\,\text{عم}_2 + \text{عم}_3)$ ایک چھوٹی مقدار ہے۔ اِس لیے اِس مساوات کو حل کرنے میں ہم ت کی بجائے تقریبی قیمت تَ مساوات

$$\text{ط}_1 + \text{ھ}\,\text{تَ} = \text{عم}_1 + \text{تَ}\,(\text{عم}_2 - \text{عم}_1)$$

کو حل کر کے معلوم کر لیتے ہیں اور پھر ہم اِس قیمت تَ کو مذکورۂ بالا چھوٹی رقم میں داخل کرتے ہیں اور ت کے لیے حسب ذیل مفرد مساوات حل کرتے ہیں

$$\text{ط}_1 + \text{ھ}\,\text{ت} = \text{عم}_1 + \text{ت}\,(\text{عم}_2 - \text{عم}_1) + \frac{1}{2}\,\text{تَ}\,(\text{تَ} - 1)\,(\text{عم}_1 - 2\,\text{عم}_2 + \text{عم}_3)$$

کسی سیّارہ کے بالائی تکبُّد کا وقت

متذکرۂ صدر عمل کو واضح کرنے کے لیے ہم مشتری (Jupiter) کے تکبّد کا

وقت بمقام گرینچ بتاریخ ۲۵۔ ستمبر ۱۹۰۶ء محسوب کریں گے۔
بحری جنتری (Nautical almanac) کے صفحہ ۲۳۰ سے ہمیں حسب ذیل مواد ملتا ہے :-

اوسط ظہر	مشتری کا صعود مستقیم	فرق اول	فرق دوم
۲۵ ستمبر ۱۹۰۶ء	۶گ ۳۹م ۵۳٫۵۹ش		
		+۲۶٫۹۰ش	
۲۶ ,, ,,	۶گ ۴۰م ۲۰٫۹۲ش		-۰٫۶۸ش
		+۲۶٫۲۲ش	
۲۷ ,, ,,	۶گ ۴۰م ۴۶٫۷۱ش		

(۱۰۰) اِس لیے مشتری کا صعود مستقیم ۲۵ ستمبر ۱۹۰۶ء کی ظہر کے ت دن بعد یہ ہے

۶گ ۳۹م ۵۳٫۵۹ش + ۲۶٫۹۰ش ت - ۰٫۳۴ش ت (ت-۱)

تکبُّد کی آن پر یہ صعود مستقیم کوکبی وقت کے مساوی ہوتا ہے جو یہ ہے

۱۲گ ۱۳م ۳۴٫۶۲ش + ت [۲۴گ ۳م ۵۶٫۵۵ش]

اِس لیے ت کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

۳۰گ ۳۹م ۵۳٫۵۹ش + ۲۶٫۹۰ش ت - ۰٫۳۴ش ت (ت-۱)

= ۱۲گ ۱۳م ۳۴٫۶۲ش + ت [۲۴گ ۳م ۵۶٫۵۵ش]

دائیں جانب کی آخری رقم کو نظر انداز کرنے اور پہلے حل میں سب ثانیوں کو ترک کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۱۸گ ۲۶م = ت (۲۴گ ۳م)

اس لیے ت = ۰٫۷۷۔

ت کی اِس تقریبی قیمت کو -۴۳۴ء۰ش ت (ت - ۱) میں داخل کرنے سے وہ ۶-ء۰ش میں تحویل ہو جاتا ہے۔

اِس لیے مساوات مندرجۂ بالا ہو جاتی ہے

۳۰گ ۳۹م ۵۳ء۶۵ش + ۲۶ء۹۰ش ت = ۱۲گ ۱۳م ۳۴ء۶۲ش + ت (۲۴گ ۳م ۵۶ء۵۵ش)

پس ت = (۱۸گ ۲۶م ۱۹ء۰۳ش) / (۲۴گ ۳م ۲۹ء۶۵ش) = ۰ء۷۶۶۴۱۶

اس لیے مشتری کا تکبدِ ظہر کے بعد اوسط شمسی دن کا ۰ء۷۶۶۴۱۶ ہے

یعنی ۱۸گ ۲۳م ۳۸ء۳۴ش گ - ا - و پر (دیکھو بحری جنتری سنہ ۱۹۰۶ء صفحہ ۲۷۲)

چاند کے بالائی تکبد کا وقت

چاند کی صورت میں حرکت اِس قدر تیز ہوتی ہے کہ ساعت بہ ساعت اِس کے مقامات جو ایفیمرس سے حاصل ہو سکتے ہیں دیکھنے پڑتے ہیں۔ مثالاً ہم وہ وقت محسوب کریں گے جس پر چاند نے بمقام گرینوچ بتاریخ ۲۹ اکتوبر سنہ ۱۹۰۶ء نصف النہار کو عبور کیا تھا۔

اُس دن اوسط ظہر پر کوکبی وقت ۱۴گ ۲۷م ۴۲ء۳۷ش ہے (بحری جنتری سنہ ۱۹۰۶ء صفحہ ۱۶۵)۔ چاند کا صعود مستقیم بوقت ظہر (بحری جنتری صفحہ ۱۷۵) ۲۳گ ۲۳م ۲۳ء۶۲ش ہے۔ اگر چاند میں حرکت نہ ہوتی تو اِس سے یہ نتیجہ نکلتا کہ چاند کو شام میں تقریباً دس بجے تکبد کرنا چاہئے۔ دس بجے چاند کا صعود مستقیم تقریباً ۲۳گ ۴۴م ہے اور اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ ظہر اور چاند کے تکبد کے درمیان وقفہ تقریباً کوکبی وقت کے ۱۰گ ۱۶م ہے یا اوسط شمسی وقت کے ۱۰گ ۱۴م۔ اِس لیے ہم ایفیمرس سے حسب ذیل مواد لیکر چاند کے تکبد کا وقت معلوم کر لیتے ہیں :-

صعود مستقیم چاند	فرق اول	فرق دوم
۲۹ر اکتوبر ۱۹۰۶ء ۱۰ گھنٹے ۰گ ۴۲م ۵۲٫۰۳ش		
	+۱م ۵۶٫۴۰ش	
۱۱ گھنٹے ۰گ ۴۴م ۴۸٫۴۳ش		−۰٫۰۶ش
	+۱م ۵۶٫۳۴ش	
۱۲ گھنٹے ۰گ ۴۶م ۴۴٫۷۷ش		

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ظہر کے بعد (۱۰ + ت) گھنٹوں پر چاند کا صعود مستقیم ہے

۰گ ۴۲م ۵۲٫۰۳ش + ۱۱۶٫۴۰ش ت − ۰٫۰۳ ت (ت − ۱) (۱۰۱)

چونکہ ت تقریباً ۱/۴ ہے اِس لیے آخری رقم تقریباً ایک ثانیہ کا ۱/۲۰۰ حصہ ہے اور اِس لیے وہ نظر انداز کی جا سکتی ہے۔ اِس لیے ت معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساوات ملتی ہے

۰گ ۴۲م ۵۲٫۰۳ش + ۱۱۶٫۴۰ش ت

= اوسط وقت ۱۰گ پر کوکبی وقت + ت [۱گ ۰م ۹٫۸۶ش]

بائیں جانب ت کا سر ایک اوسط گھنٹے کی کوکبی قیمت ہے۔ زیر بحث یوم میں اوسط ظہر پر کوکبی وقت ۱۴گ ۲۷م ۳۷٫۴۲ش ہے۔ اگر اس میں ہم ۱۰گ ۱م ۳۸٫۵۶ش جمع کریں جو کہ اوسط وقت کے ۱۰گ کا کوکبی معادل ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ۱۰گ ۔ ۱ ۔ ۹ پر کوکبی وقت ۰گ ۲۹م ۱۵٫۹۸ش ہے۔ اِس لیے مساوات بالا ہے

۰گ ۴۲م ۵۲،۰۳ش − ۰گ ۲۹م ۱۵،۹۸ش = ت (۱گ ۰م ۹،۸۶ش − ۱م ۵۶،۴۰ش)

ت = ۱۳م ۳۶،۰۵ش ÷ ۵۸م ۱۳،۴۶ش = ۰،۲۳۳۵۹۴

یہ دس بجے شام کے بعد ایک اوسط گھنٹے کی وہ کسر ہے جس پر تکبّد واقع ہوتا ہے یعنے تکبّد کا وقت ۱۰گ ۱۴م ۰،۹۴ش ہے (بحری جنتری سنہ ۱۹۰۶ء صفحہ ۱۶۷)

طول بلد لہ پر تکبّد کا وقت

فرض کرو کہ کسی جرم فلکی کے بالائی تکبّد کا وقت بمقام پ معلوم کرنا مقصود ہے جو طول بلد لہ میں گرینوچ کے مغرب میں واقع ہے۔

تکبّد کی آن پر جرم کا صعود مستقیم بلاشبہ اس مقام پر کے کوکبی وقت کے مساوی ہوگا ۔ فرض کرو کہ مقامی اوسط وقت طہ ہے تو گرینوچ پر اوسط وقت اسی آن پر طہ + لہ ہوگا اور اس لیے جرم کے صعود مستقیم کو بینی ادراج کے ذریعہ طہ + لہ کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

پس ہمیں اوسط وقت طہ کے جواب میں صرف پ پر کا کوکبی وقت معلوم کرنا ہے ۔ ایفیمرس سے گرینوچ پر اوسط ظہر کے جواب میں کوکبی وقت ملیگا ۔ اس میں

لہ / ۲۴گ × (اوسط شمسی اور کوکبی دن کے درمیان فرق کوکبی وقت میں)

کا اضافہ کرنا ہوگا تاکہ بمقام گرینوچ اوسط ظہر پر کوکبی وقت حاصل ہو ۔ اس میں طہ کو بقدر اس نسبت کے بڑھا کر جمع کرنا چاہئے جو اوسط دن کے وقفہ کو کوکبی دن کے وقفہ سے ہے ۔ محصلہ کوکبی وقت کو صعود مستقیم کے مساوی رکھنے سے طہ معلوم ہو جائیگا۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم وہ وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں جس پر چاند رصدگاہ　(۱۰۲)

لِک ماؤنٹ ہملٹن کیلیفورنیا کے نصف النہار کو بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۰۶ء عبور کرتا ہے۔ اِس مقام کا طول بلد ۸گ ۶م ۳۴،۸۹ث ہے اور اگر تکبد کا اوسط مقامی وقت طہ ہو تو گرینوچ اوسط وقت ۸گ ۶م ۳۴،۸۹ث + طہ ہے۔

ایفیمرس سے معلوم ہوتا ہے کہ بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۰۶ء گرینوچ اوسط ظہر پر کوکبی وقت ۱۸گ ۱۲م ۱۳،۱۲ث ہے اور چاند کا صعود مستقیم ۲گ پر ۲گ ۱۹م ۲۹،۱۸۴ت سے ۲۳ پر ۳گ ۳م ۳۲،۰۸۰ث تک متغیر ہوتا ہے اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ گرینوچ پر تکبد تقریباً ۸گ ۲۲م گ-ا-و پر واقع ہوتا ہے۔ بعد کے ۸ گھنٹوں میں چاند کے صعود مستقیم میں تقریباً ۱۵م کا اضافہ ہوتا ہے۔ اِس لیے لِک کی رصدگاہ پر تکبد تقریباً ۸گ ۷م ۳۴ مقامی اوسط وقت پر واقع ہوگا یا تقریباً ۱۶گ ۳م ۴۴ گرینوچ اوسط وقت پر۔ پس جدولوں کا وہ حصہ جسے صحیح عمل حساب میں استعمال کرنا ہوگا حسب ذیل ہے:-

گ-ا-و		چاند کا صعود مستقیم	فرق اول	فرق دوم
۲۵ دسمبر ۱۹۰۶ء	۱۶ گھنٹے	۲گ ۵۰م ۹،۷۳ث		
			+ ۱م ۵۵،۵۵ث	
	۱۷	۲گ ۵۲م ۲۸،۰۵ث		+ ۰،۰۸ث
			+ ۱م ۵۵،۶۳ث	
	۱۸	۲گ ۵۴م ۹۱،۰ث		

فرض کرو کہ ۸گ ۶م ۳۴،۸۹ث + طہ = ۱۶گ + ت جہاں ت ایک گھنٹہ کی کسر ہے۔

تب طہ = ۷ گ ۵۳ م ۱۱، ۲۵ ش + ت

لِک کی رصدگاہ پر مقامی اوسط وقت طہ کے جواب میں کوکبی وقت حسب طریقہ ذیل معلوم کیا جاتا ہے۔

کوکبی وقت گرینوچ

اوسط ظہر پر = ۱۸ گ ۱۲ م ۱۳، ۲۱ ش

لِک کا طول بلد

× (۳ م ۵۶، ۵۶ ش) \ ۲۴ گ = ۱ م ۹۳، ۱۹ ش

(۷ گ ۵۳ م ۱۱، ۲۵ ش + ت) کوکبی وقت میں بیان شدہ

= ۷ گ ۵۴ م ۴۲، ۸۸ ش + (۱ گ ۰ م ۹، ۸۶ ش) ت

ان تین سطروں کو جمع کرنے سے مقام لِک پر چاند کے بالائی تکبدُ کا کوکبی وقت حاصل ہوتا ہے جو = ۲ گ ۹ م ۴۴، ۲۳ ش + (۱ گ ۰ م ۹، ۸۶) ت

چاند کا صعود مستقیم (۱۲ + ت) گ گ۔ ا۔ و پر

۲ گ ۰۵ م ۹، ۷۳ ش + ت (۱۱۵، ۵۵ ش) + ۰۴، ۰۱ ش ت (ت - ۱) ہے۔

چونکہ ت تقریباً ۶ گ ہے اس لیے اِس جملہ کی تیسری رقم - ۰۱، ۰ ش ہے اور ت معلوم کرنے کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

۲ گ ۸ م ۴۴، ۲۳ ش + ت (۱ گ ۰ م ۹، ۸۶ ش)

= ۲ گ ۵۰ م ۹، ۷۲ ش + ت (۱۱۵، ۵۵ ش)

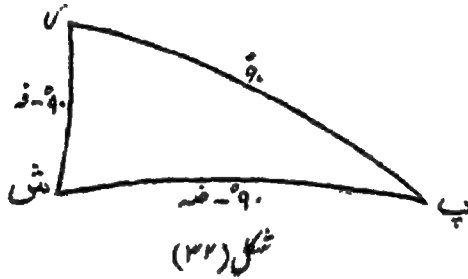
یا ت = $\frac{۴۱^م\ ۲۸،\ ۵۳^ش}{۵۸^م\ ۱۳،\ ۶۳^ش}$ = ۲۰۰۰۷۱۷۱۰ گھنٹے (۱۳۳)

= ۴۳م ۵۷٬۱ش

پس بمقام لِک چاند کا تکبدُ ۱۶گ ۴۳م ۵۷٬۱ش گرینوچ اوسط وقت یا ۸گ ۳۶م ۲۸٬۲۶ش مقامی اوسط وقت پر واقع ہوا ۔

۳۷ ـــ کسی جِرمِ فلکی کا طلوع و غروب ـــ

کسی جرم فلکی کے طلوع اور غروب ہونے کا وقت بڑی حد تک انعطاف سے متاثر ہوتا ہے ۔ ہم انعطاف کے اثر پر کسی آیندہ باب (چھٹے) میں غور کریں گے اور فی الحال اِس کو ملتوی کرتے ہیں ۔ ہم یہاں وہ ضابطے بیان کریں گے جن سے یہ معلوم ہو گا کہ کوئی جرم فلکی کرۂ ہوائی کے اثرات سے قطع نظر کس وقت افق پر یعنے راس سے ۹۰° پر ہوتا ہے ۔ شکل (۳۲) میں نقطے ش اور ر علی الترتیب قطب شمالی اور راس ہیں ۔ پ ایک

شکل (۳۲)

ستارہ ہے بوقت طلوع یا غروب جبکہ ر پ = ۹۰° ۔ اس لیے حاصل ہوتا ہے

۰ = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س

اس لیے جم س = ـ مس فہ مس ضہ

اِس کے بالعموم دو حل ہوں گے ایک س (< ۱۸۰°) جو غروب کے

جواب میں ہوگا اور دوسرا ۳۶۰° – س جو طلوع کے جواب میں ہوگا بشرطیکہ ستارہ ایسا ہو کہ مُشاہد کے عرض بلد پر طلوع اور غروب ہوتا ہو ۔

مثال ۱ ۔۔ ثابت کرو کہ میل ضہ کا کوئی جرم عرض بلد فہ کے مقام پر نہ طلوع ہوگا نہ غروب اِلّا آنکہ مس فہ مس ضہ < ۱ (بلا لحاظ علامت) ۔

مثال ۲ ۔۔ اگر ایک ستارہ کا شمالی میل ۴۰° ، تو ثابت کرو کہ کوکبی دن میں گھنٹوں کی وہ تعداد جن کے اثنا میں ستارہ اُس مقام کے افق کے نیچے ہوگا جس کا عرض بلد ۳۰° ہے ۸٫۱۳۶ ہے ۔

مثال ۳ ۔۔ سماک رامح کا میل ۱۹۰۹ء میں ۱۹° ۳۹′ ش ہے اور کیمبرج کا عرض بلد ۵۲° ۱۳′ ہے ۔ یہ ستارہ طلوع اور تکبد کے درمیانی وقفہ میں جس ساعتی زاویہ میں سے حرکت کرتا ہے اُس کو معلوم کرو ۔

مثال ۴ ۔۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ کے طلوع کا کوکبی وقت ک اور غروب کا وقت کَ ہے اور ستارہ کے محدد عہ، ضہ ہیں ۔ ثابت کرو کہ ک = عہ + سہَ اور کَ = عہ + سہً جہاں سہَ اور سہً مساوات (۱۰۴۴)

جم سہ = – مس فہ مس ضہ

کی دو اصلیں ہیں ۔

مثال ۵ ۔۔ کن حالات کے تحت ایک ستارہ کا السمت طلوع سے تکبد تک مستقل رہے گا ۔

اگر ستارہ کا السمت مستقل ہے تو اُسے راس میں سے گذرنے والے ایک بڑے دائرہ پر حرکت کرنا چاہئے ۔ اِس لیے ستارہ سماوی خط استوا پر ہونا چاہئے اور قطب مشاہد کے اُفق پر ہونا چاہئے یعنی مُشاہد ارضی خط استوا پر ہونا چاہئے ۔

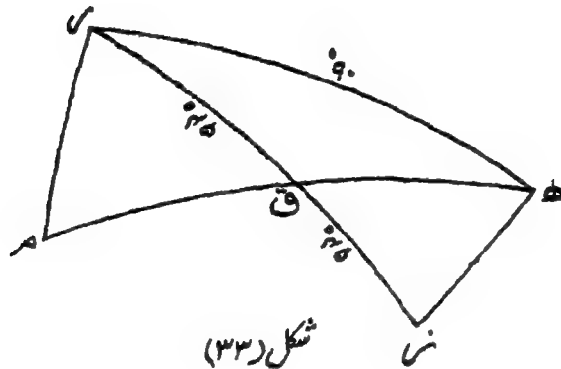
مثال ۶ ۔۔ اگر عرض بلد فہ اور ایک جرم فلکی کا میل ضہ ، اور س اس کا وہ ساعتی زاویہ ہو جو بوقت طلوع یا غروب حاصل ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

۲ جم۲ $\frac{1}{2}$ س = قط فہ قط ضہ جم (فہ + ضہ)

جبکہ انعطاف کے اثر کو نظر انداز کر دیا گیا ہو ۔

مثال ۷ ــ ثابت کرو کہ عرض بلد ۴۵° میں وہ وقفہ مستقل ہے جو کسی ستارہ کے مشرقی سمت میں سے گزرنیکے وقت اور اس کے غروب کے وقت کے درمیان ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ ستارہ کا محل جبکہ وہ مشرقی سمت میں ہو م ہے اور فرض کرو کہ راس ر اور قطب ق ہے (شکل ۳۳) ۔ تب زاویہ م ر ق = ۹۰°، ر ق = ۴۵° ۔ ر ق کو ز تک اس طرح خارج کرو کہ ق ز = ۴۵° اور فرض کرو کہ ر ھ (= ۹۰°)، م ق ممدودہ کو ھ پر قطع کرتا ہے ۔

شکل (۳۳)

چونکہ ر ز = ر ھ = ۹۰° اس لیے زاویہ ر ز ھ = ۹۰° اور اس لیے مثلثات ر ق م اور ز ق ھ میں ر ق = ق ز اور م ر ق = ھ ز ق = ۹۰° ۔ اس لیے یہ مثلث مساوی ہیں اور م ق = ھ ق اور چونکہ ھ، راس سے ۹۰° پر ہے اس لیے وہ، ستارہ کے غروب کا محل ہے پس ستارہ، م سے ھ تک نصف کوکبی یوم میں حرکت کرتا ہے ۔

مثال ۸ ــ دو ستارے جن کے میل ض، ض ہیں مشاہدہ کئے گئے تو معلوم ہوا کہ وہ ایک ہی وقت پر شرق میں ہوتے ہیں اور نیز ایک ہی وقت پر غروب ہوتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ مشاہد کے مقام کا عرض بلد ۴۵° ہے اور اگر ستاروں کے طلوع کے وقتوں کے درمیان گھنٹوں کی تعداد ت ہو تو

(۱۰۵)

۲ جم (ت × ۱۵°)⁄۴ = √((۱ + مس ضہ۱)(۱ + مس ضہ۲)) + √((۱ - مس ضہ۱)(۱ - مس ضہ۲))

قطب سے اُس بڑے دائرہ پر عمود کھینچو جو اِن دو ستاروں کو ملاتا ہے۔ اِس عمود کا طول یومی حرکت سے متاثر نہیں ہوتا اور اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ قطب، اول السمت اور افق سے مساوی فاصلہ پر ہے یعنی اُس مقام کا عرض بلد ۴۵° ہے۔

نیز وہ وقت جس کے اثناء میں ستارہ افق کے اوپر رہتا ہے غروب کے وقت ستارہ کے ساعتی زاویہ کا دگنا ہے یعنی

۲ جم^-۱ (- مس فہ مس ضہ)

ہے۔

اب چونکہ ستارے ایک ساتھ غروب ہوتے ہیں اور فہ = ۴۵° اسلیے اِن کے طلوع کے وقتوں کے درمیان وقفہ

۲ جم^-۱ (- مس ضہ۱) - ۲ جم^-۱ (- مس ضہ۲)

ہے۔ اس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۹۔ اگر دو ستارے جن کے محدد علی الترتیب عہ، ضہ اور عہَ، ضہَ ہیں ایک ہی لمحہ پر عرض بلد فہ کے ایک مقام پر طلوع ہوں تو ثابت کرو کہ

جب۲ (عہ - عہَ) ۲م۲ فہ = مس۲ ضہ + مس۲ ضہَ - ۲ مس ضہ مس ضہَ جم (عہ - عہَ)

مثال ۱۰۔ اگر کرۂ سماوی کا رقبہ ۱ ہو تو ثابت کرو کہ کسی عرض بلد فہ میں رہنے والے مشاہد کے لیے ایک حصہ ۱ (جب۲ ½ فہ میں کے ستارے کبھی بھی اُس کے افق کے اوپر نہیں ہوں گے، دوسرے حصہ ۱ (جب۲ ½ فہ میں کے ستارے ہمیشہ اِس کے افق کے اوپر ہوں گے، حصہ ۱ جم فہ میں کے ستارے روزانہ طلوع و غروب ہوں گے اور حصہ (جم۲ ½ فہ میں وہ سب ستارے آجائیں گے جن سے وہ واقف ہو سکتا ہے۔

اگر ایک کرہ کا نصف قطر ا ہو تو اس کا وہ رقبہ جو نصف قطر فہ کے ایک چھوٹے دائرہ سے منقطع ہوتا ہے ۲ πؔ ا۲ (۱ - جم فہ) ہے۔ شمالی اور

جنوبی قطبوں کے گرد نصف قطر فہ کے چھوٹے دائرے کرہ کے دو حصے قطع کریں گے جو علی الترتیب ہمیشہ افق کے اوپر اور ہمیشہ افق کے نیچے رہیں گے۔

مثال ۱۱ — ایک مقام پر جس کا شمالی عرض بلد فہ ہے دو ستارے جن کے ش ـ ق ـ ف (شمالی قطبی فاصلے) علی الترتیب ف اور فَ ہیں ایک ساتھ طلوع ہوتے ہیں اور پہلا ستارہ نصف النہار پر اُس وقت آتا ہے جبکہ دوسرا غروب ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

مس فہ / مس فَ = ۱ − ۲ مس۲ فہ / مس۲ فَ

یہ ظاہر ہے کہ اگر دوسرے ستارے کا ساعتی زاویہ بوقت طلوع س ہو تو پہلے ستارہ کا ساعتی زاویہ ۲ س ہونا چاہئے، اس لیے

۰ = جم ف جب فہ + جب ف جم فہ جم ۲ س

۰ = جم فَ جب فہ + جب فَ جم فہ جم س

اِن مساواتوں سے س کو ساقط کریں تو مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

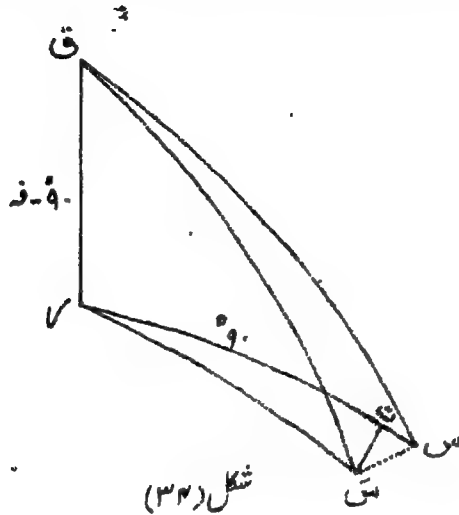
مثال ۱۲ — اگر کسی آن پر فوکو کے رقاص کا اہتزازی مستوی ایک ستارہ میں سے گذرے جو افق کے قریب ہو تو ثابت کرو کہ جب تک یہ ستارہ افق کے قریب رہیگا اہتزازی مستوی ستارہ میں سے گذرتا رہے گا۔

فوکو کے رقاص کا مستوی انتصابی کے گرد ایک ایسی زاوئی رفتار سے گردش کرتا نظر آتا ہے جو کرہ سماوی کی زاوئی رفتار کو عرض بلد کی جیب سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔ وقت کے چھوٹے وقفہ فرت میں ستارہ س (شکل ۳۴) قوس س سَ پر سَ تک حرکت کرتا ہے جہاں

(۱۰۶)　س سَ = جم ضہ فرت ـ اگر ر س پر سَ ت عمود ہو تو

سَ ت = سَ س جب سَ س ت = جم ضہ جم عا فرت = جب فہ فرت

اس لیے　　سَ ر س = جب فہ فرت

شکل (۳۴)

۳۸ ـــ سماوی عرض بلد اور طول بلد ـــ بعض خاص قسم کی تحقیقات

میں کرۂ سماوی پر محددوں کے ایک اور نظام کو استعمال کرنا پڑتا ہے۔ جس طرح خط استوا سے وہ ذرائع مہیا ہوتے ہیں جن سے کسی ستارہ کے صعود مستقیم اور میل کی تعریف عمل میں آتی ہے عین اسی طرح طریق الشمس کو محددوں کے ایک نظام کی اساس قرار دیا جاتا ہے، یہ محدد سماوی طول بلد اور عرض بلد کے نام سے مشہور ہیں۔ راس الحمل کا نقطہ ♈ وہ مبدا ہے جہاں سے طول بلد کی پیمائش عمل میں آتی ہے اور پیمائش کی سمت وہ رکھی جاتی ہے جو طریق الشمس پر سورج کی ظاہری سالانہ حرکت کی ہے جیسا کہ شکل (۳۵) میں ایک تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

طریق الشمس کے قطب ک سے ایک بڑا دائرہ ستارہ س میں سے گذرتا ہوا کھینچا جاتا ہے اور اس بڑے دائرہ کا مقطوعہ ت س جو ستارہ اور طریق الشمس کے درمیان ہے وہ محدد ہے جسے ستارہ کا عرض بلد کہتے ہیں۔ یہ عرض بلد مثبت ہوگا اگر ستارہ اُس نیم کرہ میں واقع ہو جس میں طریق الشمس کا قطب ہے اور منفی ہوگا اگر ستارہ اُس نیم کرہ میں واقع ہو جس میں طریق الشمس کا

ضد شطب ہے۔ مبداء ♈ سے عمود کے پائین ت تک طریق الشمس کی جو قوس ہے اُسے ستارہ کا **طول بلد** کہتے ہیں جو دوسرا محدد ہے۔ اس کو طریق الشمس پر ۰° سے ۳۶۰° تک ناپا جاتا ہے، اس طرح اگر طریق الشمس پر کسی جرم کا صعود مستقیم بڑھ جائے تو اس کا طول بلد بھی بڑھ جاتا ہے۔ (۱۰۶)

ہم بلا شبہ اس امر کا مشاہدہ کریں گے کہ لفظوں عرض بلد اور طول بلد کے معنی جو یہاں ہیئتی مفہوم میں سمجھائے گئے ہیں ان الفاظ کے اُن معنوں سے بالکل مختلف ہیں جو ارضی معاملات کے لحاظ سے بالعموم مستعمل ہیں۔ ہیئتی عرض بلد کو بہ سے اور ہیئتی طول بلد کو لہ سے بالعموم تعبیر کیا جاتا ہے۔ پس ♈ ت = لہ اور ت س = بہ

دائرہ انقلابین کی قوس ل ھ جو خط استواء اور طریق الشمس کے درمیان منقطع ہوتی ہے طریق الشمس کے میلان کے مساوی ہے۔

اگر س کا صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہو تو استحالہ کے ضابطے دفعہ ۱۲ کے عام ضابطوں سے حاصل ہو سکتے ہیں یا راست مثلث س ک ش سے (شکل ۳۵) اور عرض بلد اور طول بلد کی تعیین کے لیے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :-

جب بہ = جم سہ جب ضہ - جب سہ جم ضہ جب عہ

جم بہ جب لہ = جب سہ جب ضہ + جم سہ جم ضہ جب عہ ... (۱)

جم بہ جم لہ = جم ضہ جم عہ

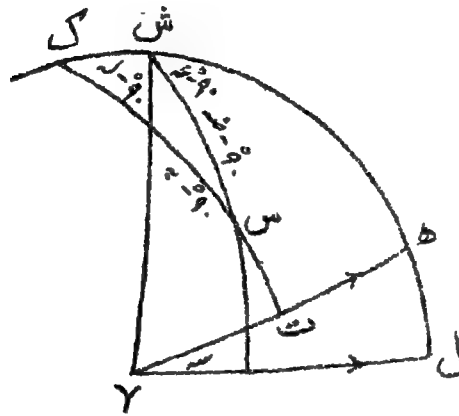
ان مساواتوں سے ہم بہ اور لہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ عہ اور ضہ دیئے گئے ہوں۔ مسئلہ کی نوعیت سے بالعموم یہ معلوم کر لینا آسان ہوگا کہ طول بلد، ۱۸۰° سے بڑا ہے یا چھوٹا۔ جب یہ معلوم ہو جائے تو آخری دو مساواتوں میں سے کسی ایک کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم لوگارتمی عمل کے لیے ان مساواتوں کو ایک امدادی مقدار

(۱۰۲ مہ = زاویہ س ۲ ل کے اوخال سے زیادہ سہولت بخش بنا سکتے ہیں،
اِس طرح مس مہ = قم عہ مس ضہ (دفعہ ۱۳) اور

شکل (۳۵)

جب بہ = جب ضہ جب (مہ − سہ) قم مہ،

جم بہ جب لہ = جب ضہ جم (مہ − سہ) قم مہ،

جم بہ جم لہ = جم ضہ جم عہ

مساواتوں کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ مہ کی اختیار کردہ قیمت کو بقدر ۱۸۰° کے تبدیل کرنے سے نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

اگر ہم ک ش کے محاذی س پر جو زاویہ بنتا ہے اُس کو ۹۰° − ع سے تعبیر کریں تو ڈلمبر کے ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

جم ½ (ع + لہ) جم (۴۵° − ½ بہ) = جم {۴۵° − ½ (ضہ + سہ)} جم (۴۵° + ½ عہ)

جب ½ (ع + لہ) جم (۴۵° − ½ بہ) = جم {۴۵° − ½ (ضہ − سہ)} جب (۴۵° + ½ عہ)

جب ½ (ع − لہ) جب (۴۵° − ½ بہ) = جب {۴۵° − ½ (ضہ + سہ)} جم (۴۵° + ½ عہ)

جم ½ (ع − لہ) جب (۴۵° − ½ بہ) = جب {۴۵° − ½ (ضہ − سہ)} جب (۴۵° + ½ عہ)

اِن مساواتوں سے لہ اور بہ اور نیز ع متعین کئے جا سکتے ہیں ـ

اگر اس کا معکوس مسئلہ حل کرنا ہو یعنی اگر صعود مستقیم اور میل معلوم کرنا ہو جبکہ طول بلد اور عرض بلد دئے گئے ہوں تو (۱) کے استحالہ سے حاصل ہوتا ہے

جب ضہ = جم سہ جب بہ + جب سہ جم بہ جب لہ

جم ضہ جب عہ = ـ جب سہ جب بہ + جم سہ جم بہ جب لہ ‎ ...(۲)

جم ضہ جم عہ = جم بہ جم لہ

مثال ۱ ـــ ثابت کرو کہ طریق الشمس کے شطب کا صعود مستقیم اور میل علی الترتیب ۲۷۰° اور ۹۰° ـ سہ ہیں اور یہ کہ ضد شطب کا صعود مستقیم اور میل ۹۰° اور سہ ـ ۹۰° ہیں ـ

مثال ۲ ـــ اگر طریق الشمس کے اُس نقطہ کا صعود مستقیم اور میل عہ، ضہ ہوں جس کا طول بلد لہ ہے تو ثابت کرو کہ

جم لہ = جم عہ جم ضہ،

جب لہ جب سہ = جب ضہ،

جب لہ جم سہ = جب عہ جم ضہ

مثال ۳ ـــ اگر دو ستاروں کے صعود مستقیم اور میل علی الترتیب عہ۱، ضہ۱ اور عہ۲، ضہ۲ ہوں اور اِن کا طول بلد ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ

جب (عہ۲ ـ عہ۱) = مس سہ (مس ضہ۱ جم عہ۲ ـ مس ضہ۲ جم عہ۱)

مثال ۴ ـــ جبار (عہ) (α Orionis) کا صعود مستقیم ۵گ ۴۹م اور اس کا میل + ۷° ۲۳' ہے اور طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۷' ہے ـ ثابت کرو کہ اِس ستارہ کا طول بلد اور عرض بلد علی الترتیب ۸۷° ۱۰' اور ـ ۱۶° ۲' ہیں

مثال ۵ ـــ اگر عہ = ۶° ۳۳' ۲۹''، ضہ = ـ ۱۶° ۲۲' ۳۵''، اور سہ = ۲۳° ۲۷' ۳۲'' تو ثابت کرو کہ

لہ = ۳۵۹° ۱۷' ۴۴''، بہ = ـ ۱۷° ۳۵' ۳۷''

(۱۰۹)

پانچویں باب پر مختلف مثالیں

مثال ۱ — ثابت کرو کہ زمین کے شمالی قطب پر رہنے والے مشاہد کے لیے کسی ستارہ کا ارتفاع اس کا میل ہوگا اور وہ یومی حرکت سے غیر متغیر رہے گا۔ نیز اسی صورت میں ثابت کرو کہ کسی ستارہ کا السمت (جو کسی ثابت نصف النہار سے ناپا گیا ہو) اس کے صعود مستقیم سے صرف بقدر ایک قوس کے فرق رکھے گا جو کسی دئے ہوئے لمحہ پر سب ستاروں کے لیے وہی ہوگی۔

مثال ۲ — صعود مستقیم عہ اور میل ضہ کے ایک ستارہ کا عرض بلد بہ چھوٹا ہے۔ ثابت کرو کہ سورج کا طول بلد جبکہ اس کا صعود مستقیم عہ ہو ستارہ کے طول بلد سے بقدر بہ جیب ضہ تم عہ (تقریبًا) کے فرق رکھتا ہے۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ منطقہ بارده شمالی یا منطقہ بارده جنوبی کے اندر کسی مقام کے لیے افق اور طریق الشمس کے نقاط تقاطع ایک کو کبھی یوم میں افق کے گرد پوری گردش کرتے ہیں لیکن کسی دوسرے مقام کے لیے یہ نقطے مشرق اور مغرب کے نقطوں کے گرد اہتزاز کرتے ہیں۔

مثال ۴ — مشرق کے نقطہ کو م سے، قطب کو ق سے اور دو ستاروں کے مقامات کو ا اور ب سے تعبیر کیا گیا ہے۔ ق ا م ب سے اَ پر ملتا ہے اور ق ب، م ا سے بَ پر ملتا ہے۔ اَبَ، اَ، بَ کے میل علی الترتیب ضہ، ضہ۱، ضہ۲ ہیں۔ ثابت کرو کہ

مس ضہ۱ مس ضہ۲ = مس ضہ مس ضہ

فرض کرو کہ م ا اور م ب، نصف النہار کو قطب سے علی الترتیب فاصلوں لہ، مہ پر قطع کرتے ہیں۔ اب چونکہ م، نصف النہار کا قطب ہے اسلیے مس لہ | مس مہ = مس ضہ۱ | مس ضہ اور مس مہ | مس لہ = مس ضہ۲ | مس ضہ

مثال ۵ — اگر مقام پ پر ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی ہو تو اسی آن ایک دوسرے مقام پَ پر جو پ سے چھوٹے فاصلہ ف پر واقع ہے اِس ستارہ کا راسی فاصلہ یَ ہوگا جہاں

یَ = ی ـ ف جم طہ + ۱/۲ ف^۲ جب ۱″ مم ی جب^۲ طہ

جس میں طہ وہ فرق ہے جو ستارہ اور پَ کے السمتوں کے درمیان ہے جبکہ انہیں پ سے دیکھا جاتا ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ یَ ـ ی اور ف دونوں قوس میں بیان کئے گئے ہیں، اِس لیے نیم قطری زاویوں میں اِن کے ناپ علی الترتیب (یَ ـ ی) × جب ۱″ اور ف جب ۱″ ہیں۔ پس

جم یَ = جم ی جم ف + جب ی جب ف جم طہ

= جم ی (۱ ـ ۱/۲ ف^۲ جب^۲ ۱″) + ف جب ۱″ جب ی جم طہ

لیکن

جم یَ = جم (یَ ـ ی) جم ی ـ جب (یَ ـ ی) جب ی

= جم ی {۱ ـ ۱/۲ (یَ ـ ی)^۲ جب^۲ ۱″} ـ (یَ ـ ی) جب ۱″ جب ی

جم یَ کی اِن دو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

یَ ـ ی = ـ ف جم طہ + ۱/۲ ف^۲ جب ۱″ مم ی ـ ۱/۲ (یَ ـ ی)^۲ جب ۱″ مم ی

پہلے تقرب کے طور پر یَ ـ ی = ـ ف جم طہ حاصل ہوتا ہے اور آخری رقم میں اِس کو درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

مثال ۶ — فرض کرو کہ افق پر کے ایک نقطہ کا السمت، میل، اور اختلاف منظری زاویہ علی الترتیب اَ، فہَ، عا ہیں۔ ثابت کرو کہ دے ہوئے عرض بلد فہ کے لیے یہ مقداریں حسب ذیل ضابطوں کے ذریعہ کسی ساعتی زاویہ (۱۰)

س کے لیے محسوب کی جاسکتی ہیں :—

مس ضہَ = ۔مم فہ جم س، جب اَ = ۔جب س جم ضہَ، جم اَ = + قط فہ جب ضہَ

مس اَ = + جب فہ مس س، جم عاَ = + جب فہ قط ضہَ، جب عاَ = + جب س جم فہ

مثال ۷ — اگر ایک ستارہ کا میل اور ساعتی زاویہ علی الترتیب ضہ، س ہوں تو حسب ذیل ضابطے حاصل کرو جن سے اس کا السمت ا اور راسی فاصلہ ی آسانی سے معلوم ہو سکیں جبکہ عرض بلد فہ کے لیے اَ، ضہَ، عاَ (حسب تعریف مندرجہ مثال ماسبق) کی قیمتیں ساعتی زاویہ س کے جواب میں معلوم ہوں۔

جم ی = جب (ضہَ ـ ضہ) جم عاَ،

جب (اَ ـ ا) جب ی = جب (ضہَ ـ ضہ) جب عاَ،

جم (اَ ـ ا) جب ی = جم (ضہَ ـ ضہ)

مثال ۸ — پچھلی مثال میں مستعملہ مقداروں کو لیکر ثابت کرو کہ ستارہ کا اختلاف منظری زاویہ عا معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:—

جب عا = جب (ا ـ اَ) جم (ضہَ ـ ضہ)،

جم عا = مم عاَ مم (ضہَ ـ ضہ)

مثال ۹ — امثلہ ۶ اور ۷ کے ضابطوں کی مثال کے طور پر سماک رامح کا راسی فاصلہ اور السمت ساعتی زاویہ ۲گ ۲۵م پر معلوم کرو جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ میل + ۱۹° ۴۴َ اور عرض بلد ۵۲° ۱۳َ ہے۔

مثال ۱۰ — بتاؤ کہ قطبی ستارہ کے ارتفاع ا کا مشاہدہ کرنے سے جس کا ساعتی زاویہ مشاہدہ کے وقت س اور قطبی فاصلہ ق ہے عرض بلد فہ کو متعین کیا جاسکتا ہے اور یہ کہ عرض بلد معلوم کرنے کا ضابطہ تقریبی طور پر حسب ذیل ہے

فہ = ا ـ ق جم س + ½ جب ۱″ ق۲ جب۲ س مس ا

مثال ۱۱ — بتاؤ کہ ایک ستارہ کے ساعتی زاویہ س یا راسی فاصلہ ی کو جبکہ وہ مشرقی سمت یا مغربی سمت پر ہو مساواتوں

جب ضہ = جب فہ جم ی، جب س جم ضہ = جب ی، جم س جم ضہ = جم فہ جم ی

سے معلوم کر سکتے ہیں۔ پہلی صورت میں اوپر کی علامت اور دوسری صورت میں نیچے کی علامت استعمال کی جائے۔

مثال ۱۲۔ کسی ستارہ کے راسی فاصلہ ی کا پہلا اور دوسرا تفرقی سر بلحاظ ساعتی زاویہ س معلوم کرو۔

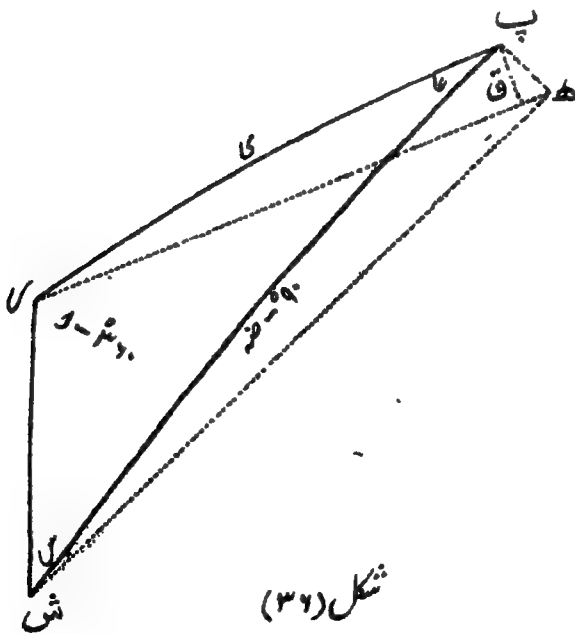
ہم اس کی تحقیق اساسی ضابطوں سے یا ہندسی طور پر حسب ذیل کر سکتے ہیں (شکل ۳۶)۔ فرض کرو کہ قطب شمالی ش، راس ر اور ستارہ پ ہے۔ وقت فرس میں ستارہ ھ تک حرکت کر چکا ہوگا جہاں پ ھ، ش پ اور ش ھ پر عمود ہے۔ اگر پ ق، ر ھ پر عمود ہو تو

فری = ھ ق = ھ پ جب عا = جم ضہ جب عا فرس = ۔جم ضہ جب ا فرس

نیز

فرا = پ ق قم ی = پ ھ جم عا قم ی = جم ضہ جم عا قم ی فرس

اس لیے فرا / فرس = جم ضہ جم عا قم ی

شکل (۳۶)

(۱۱۱) دوسرا تفرقی سر معلوم کرنے کے لیے ہم $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$ کو جو اوپر حاصل ہو چکا ہے س کے لحاظ سے تفرق کرتے ہیں اور یہ فرض کرتے ہیں کہ ا اور س دونوں نیم قطری زاویوں میں بیان ہوتے ہیں۔ اس طرح

فر^۲ ی / فر س^۲ = - جم فہ جم ا فر ا / فر س

= - جم فہ جم ا جم ضہ جم عا قم ی

مثال ۱۳ — اگر ایک ستارہ کا میل، عرض بلد سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ راسی فاصلہ میں یومی حرکت کی باعث جو تبدیلی ہوتی ہے اس کی تیز ترین شرح، میل کی جیب التمام کے مساوی ہے۔ اگر میل عرض بلد سے کم ہو تو ثابت کرو کہ راسی فاصلہ میں تبدیلی کی تیز ترین شرح عرض بلد کی جیب التمام کے مساوی ہے۔

مثال ۱۴ — اگر ایک جرم کا راسی فاصلہ ساعتی زاویہ س. پر ی. ہو اور اس کا راسی فاصلہ ساعتی زاویہ س پر ی ہو جہاں س، س. سے بہت قریب ہے تو مثال ۱۲ سے ثابت کرو کہ

ی - ی. = - ۱۵ (س - س.) جم فہ جب ا - ½ × ۲۲۵ جب ۱" (س - س.)^۲ جم فہ جم ا جم ضہ جم عا قم ی

جس میں راسی فاصلے قوس میں اور ساعتی زاویے وقت میں بیان کئے گئے ہیں۔

مثال ۱۵ — متواتر ساعتی زاویوں س۱، س۲، ...، سن پر جو بہت قریب قریب ہیں ایک ہی ستارہ کے راسی فاصلوں ی۱، ی۲، ... ین کا ایک سلسلہ حاصل کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ راسی فاصلوں اور ساعتی زاویوں کے حسابی اوسط یَ، سَ ہیں۔ ثابت کرو کہ س. کے جواب میں ی کی قیمت ی. اس طور پر حاصل ہوتی ہے کہ یَ پر تصحیح

+ ۱/۲ن ۲۲۵ جب ۱" جم فہ جم ا جم ضہ جم عا قم ی مج^ن_۱ (سر - س.)^۲

عمل میں لائی جائے۔

(۱۱۲) رکھو ا = ۔جم فہ جب ا' ب = ۔ $\frac{1}{2}$ × ۲۲۵ جب اً جم فہ جم ا جم ضہ جم عا قم ی

تو آخری مساوات (مثال ۱۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ی}_1 = \text{ی}_0 + \text{ا}\,(\text{س}_1 - \text{س}_0) + \text{ب}\,(\text{س}_1 - \text{س}_0)^2 ،$$

$$\text{ی}_2 = \text{ی}_0 + \text{ا}\,(\text{س}_2 - \text{س}_0) + \text{ب}\,(\text{س}_2 - \text{س}_0)^2 ،$$

. . . .

. . . .

$$\text{ی}_\text{ن} = \text{ی}_0 + \text{ا}\,(\text{س}_\text{ن} - \text{س}_0) + \text{ب}\,(\text{س}_\text{ن} - \text{س}_0)^2$$

جمع کرنے اور ن سے تقسیم کرنے پر

$$\bar{\text{ی}} = \text{ی}_0 + \frac{1}{\text{ن}}\,\text{ب} \sum_1^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \text{س}_0)^2$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

یہ ضابطہ اُس وقت مفید ہوتا ہے جبکہ راسی فاصلوں کے ایک سلسلہ سے جو بہت جلد جلد متواتر مشاہدہ کئے گئے ہوں بہترین نتیجہ حاصل کرنا مقصود ہو۔

مثال ۱۶ ۔ اگر میل ضہ کے ایک ستارہ کا ساعتی زاویہ س ہو جبکہ اس کا السمت ا ہے اور سَ ہو جبکہ اس کا السمت ۱۸۰° ا ہے تو ثابت کرو کہ عرض بلد فہ مساوات

$$\text{مس فہ} = \text{مس ضہ}\ \frac{\text{جم}\ \frac{1}{2}\,(\text{سَ} + \text{س})}{\text{جم}\ \frac{1}{2}\,(\text{سَ} - \text{س})}$$

سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۷ ۔ شمالی عرض بلد ۴۵° میں ایک حائط قطبی ستارہ کا بڑے سے بڑا السمت افق کے شمالی نقطہ سے ۴۵° حاصل ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس ستارہ کا قطبی فاصلہ ۳۰° ہے۔ [Math. Trip.]

مثال ۱۸ — بتاؤ کہ مقامی کوکبی وقت کا مشاہدہ کرنے سے جبکہ دو معلومہ ستاروں کا السمت ایک ہی ہو عرض بلد کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔

وہ ساعتی زاویے س، سَ جن پر ان دو ستاروں کا السمت ا ہے معلوم ہیں اور (صفحہ ۴)

مم ا جب س = ـ جم فہ مس ضہ + جب فہ جم س

مم ا جب سَ = ـ جم فہ مس ضَہ + جب فہ جم سَ

پس اسقاط کرنے پر

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{مس ضہ جب سَ ـ مس ضَہ جب س}}{\text{جب (سَ ـ س)}}$$

مثال ۱۹ — سورج کے دو ارتفاع بہ اور بہ + مف بہ ایکساتھ دو قریب کے مقامات سے جو ایک ہی نصف النہار پر ہیں اُس وقت مشاہدہ کئے گئے جبکہ سورج کا میل ضہ ہے۔ اگر اِن میں سے ایک مقام کا عرض بلد فہ ہو تو ثابت کرو کہ اِن کے عرض بلدوں کا فرق تقریباً

مف بہ جم بہ جم فہ \ {جب ضہ ـ جب بہ جب فہ}

ہے۔　[Coll. Exam.]

مثال ۲۰ — ثابت کرو کہ اگر اول السمت میں سورج کا ارتفاع عہ ہو، اُس کا طول بلد ل اور طریق الشمس کا میلان سہ تو مقام کا عرض بلد حسب ذیل ہوگا

جب^{-1} (جب سہ جب ل \ جب عہ)

مثال ۲۱ — عرض بلد فہ کس طرح ٹھیک طور پر معلوم کیا جا سکتا ہے اگر معلومہ میل ضہ کے ایک جرم کا راسی فاصلہ اُس وقت مشاہدہ کیا جائے جبکہ وہ نصف النہار سے قریب ہو۔ فہ کی ایک تقریبی قیمت فہ_1 = ی + ضہ مان لی گئی ہے۔

اساسی ضابطہ　　جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س　　(۱۱۳)

= جم (فہ ـ ضہ) ـ ۲ $\text{جب}^2 \frac{1}{2}$ س جم فہ جم ضہ

لا = ر جم لہ،

ما = ر جب لہ جم سہ ۔ ۳۹۷۱ر بہ،

ے = ر جب لہ جب سہ + ۵ ۴۴۶ ر بہ

جہاں سورج کا اوسط فاصلہ طول کی اکائی ہے اور عددی سر اعشاریہ کے ساتویں مقام کی اکائیوں میں ہیں ۔

استحالہ کے عام ضابطوں کی رو سے

جب ضہ = جب بہ جم سہ + جم بہ جب سہ جب لہ،

جم ضہ جم عہ = جم بہ جم لہ،

جم ضہ جب عہ = ۔ جب بہ جب سہ + جم سہ جم بہ جب لہ

اس لیے لا = ر جم بہ جم لہ

ما = ۔ ر جب بہ جب سہ + ر جم بہ جم سہ جب لہ،

ے = ر جب بہ جم سہ + ر جم بہ جب سہ جب لہ

(۱۱۴) سورج کی صورت میں بہ بہت چھوٹا ہوتا ہے اور جب بہ = بہ جب ۱ً جب سہ = ۰۳۹۸ ۰ر اور جم سہ = ۹۱۷۴ ۰ر رکھنے سے ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ سال بھر کے ہر دن کے لیے لا، ما، ے کی جدولیں ایفیمرس میں دی ہوئی ہوتی ہیں ۔

مثال ۲۳ ۔ یہ مان کر کہ کہکشاں، ستاروں کا ایک بڑا دائرہ ہے جو خط استواء کو صعود مستقیم ۱۸گ ۴۰م میں قطع کرتا ہے اور اس کے ساتھ زاویہ ۶۵° (شمالی جانب پیمائش کردہ) بناتا ہے، کہکشاں کے قطب کا صعود مستقیم اور میل معلوم کرو ۔

مثال ۲۴ ۔ ایک سیارہ کا شمس مرکزی مدار طریق الشمس سے چھوٹے زاویہ رخ پر مائل ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر اس کا میل اعظم ہو تو یا تو اس کی عرض بلد میں حرکت صفر ہوتی ہے یا اس کا طول بلد تقریباً ۹۰° + رخ مم سہ جب عہ ہے جہاں عہ، صعودی عقدہ کا طول بلد ہے ۔

چونکہ میل اعظم ہے اس لیے سیارہ س، خط استواء کے ساتھ اس کے

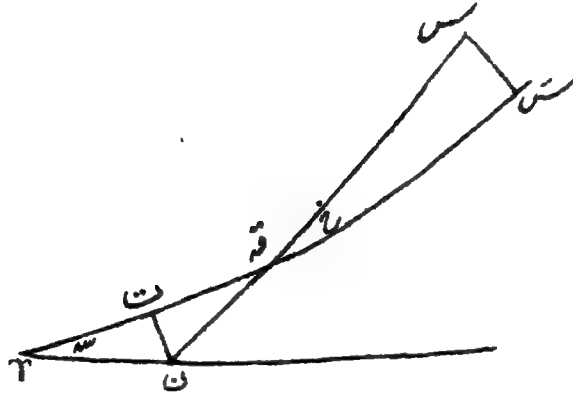
مدار کے نقطہ تقاطع ن سے ۹۰° پر ہونا چاہئیے ۔طریق الشمس پر ن س کا ظل بھی تقریباً ۹۰° ہوگا ۔ فرض کروکہ ن سے طریق الشمس ♈ قہ پر عمود ن ت ہے جہاں ♈ اعتدال سرما ہے اور قہ صعودی عقدہ ۔

چھوٹے مثلث ن ت ♈ میں مس ن ت = جب ♈ ت مس سہ

اور مثلث ن ت قہ میں مس ن ت = جب (ع ـ ♈ ت) مس خ

اس لیے جب ♈ ت = مس خ جب (ع ـ ♈ ت) مم سہ

اور اس لیے ♈ ت = خ مم سہ جب ع تقریباً

اِس لیے سیارہ کا طول بلد بالعموم ۹۰° + خ مم سہ جب ع ہے ۔

شکل (۳۷)

مثال ۲۵ ـ ثابت کروکہ قطب اسد اور چاند کے درمیان اصلی فاصلہ بوقت ۴ بجے شام گرینوچ اوسط وقت بتاریخ ۶ جنوری ۱۹۰۹ء ۱۸° ۵۹َ ۳۱ً ہے۔ یہ دیا گیا ہے کہ

	صعود مستقیم			میل			
چاند	گ ۹	م ۱۲	۹ء۵۶ ث	۲۴°	۱۵َ	۴۰ً	ش
ستارہ	۱۰	۳	۳۱ء۶	۱۲	۲۴	۴۵	ش

(۱۱۵) **مثال ۲۶** ــ ثابت کرو کہ ایک ستارہ کے لیے جو مشرق کے شمال کی طرف طلوع ہوتا ہے جس شرح سے السمت بدلتا ہے وہ شرح وہی رہتی ہے جبکہ وہ طلوع ہوتا ہے اور جبکہ وہ مشرقی سمت میں ہوتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ یہ شرح اقل ہوتی ہے جبکہ السمت مشرق کے شمال کی طرف

$$\text{جب}^{-1}\left(\text{مس له جب}\ \frac{\text{عه}}{2} \div \text{جم عه}\right)$$

ہو جہاں ستارہ کا عرض بلد له اور ارتفاع عه ہے جبکہ وہ مشرقی سمت میں ہوتا ہے۔

[Math. Trip. 1902]

مثال ۲۷ ــ ثابت کرو کہ کسی معلومہ گرینوچ وقت پر دو معلومہ ستاروں کے ارتفاعوں کے مشاہدات مشاہد کا طول بلد اور عرض بلد معلوم کرنے کے لیے کافی ہیں۔ بتاؤ کہ کس طرح ترسیمی طریقہ سے ان مشاہدات کی بنا پر مشاہد کا محل کرۂ زمین پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اگر مشاہدے کے لیے منتخبہ ستارے نصف النہار کی مخالف سمتوں میں ہوں تو ثابت کرو کہ ہر ستارہ کے مشاہدہ کردہ ارتفاع میں چھوٹی خطا صہ کی وجہ سے عرض بلد اور طول بلد میں خطائیں علی الترتیب حسب ذیل ہوں گی:-

صہ قط $(\text{عہ}_1 + \text{عہ}_2)$ جم $(\text{عہ}_1 - \text{عہ}_2)$ اور صہ قط فہ قط $(\text{عہ}_1 + \text{عہ}_2)$ جب $(\text{عہ}_1 - \text{عہ}_2)$

جہاں فہ، محسوبہ عرض بلد ہے اور ۲ عہ₁، ۲ عہ₂ ستاروں کے السمت ہیں۔

(۱۱۶)

چھٹا باب

کرۂ ہوائی کا انعطاف

صفحہ دفعہ

۳۹ ـــ مناظری انعطاف کے قوانین۔

اگر روشنی کی شعاع ا و (شکل ۳۸) ایک شفاف متجانس واسطہ ہ میں سے

حرکت کرتی ہوئی و پر اگر ایک دوسرے متجانس واسطہ ک میں داخل ہو تو اِس شعاع کی سمت میں ایکا ایک تبدیلی واقع ہوتی ہے اور شعاع اِس نئے واسطہ کو سمت و وَ میں حرکت کرتی ہوئی عبور کرتی ہے۔ یہ تبدیلی **انعطاف** کے طور پر مشہور ہے۔ شعاع ا و کو موقوعہ شعاع اور شعاع و وَ کو منعطف شعاع کہتے ہیں۔ موقوعہ شعاع اور منعطف شعاع دونوں ایک ہی مستوی میں واقع ہوتی ہیں اور یہ مستوی واسطوں کی سطحِ فاصل کے نقطہ و پر کے عماد میں سے گذرتا ہے۔ فرض کرو کہ اِن دو واسطوں کی سطحِ فاصل کے نقطہ و پر عماد م و ن ہے تو زاویہ ن و ا = سا کو وقوع کا زاویہ کہتے ہیں اور م و وَ = فہ کو انعطاف کا زاویہ کہتے ہیں۔ انعطاف کا بنیادی کلیہ ضابطہ

جب سا = مہ جب فہ

سے بیان ہوتا ہے جہاں مہ ایک خاص مستقل ہے جو اُن دو واسطوں کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے جن میں سے شعاع گذرتی ہے۔ اگر موقوعہ شعاع کی سمت میں کسی تبدیلی کے باعث زاویہ سا بدل جائے تو اِس کے ساتھ زاویہ فہ کو بھی اِس طرح بدلنا چاہئیے کہ اِن دو زاویوں کی جیوب کی نسبت وہی رہے۔ مہ کو پہلے واسطہ سے دوسرے واسطہ میں جانے کا **انعطاف نما** کہتے ہیں۔　(۱۱۷)

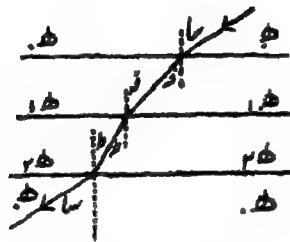
ن　ا
ھ　و　ھ
ک　ک
ھ　وَ　م　ھ
اَ

شکل (۳۸)

اِس امر کو خوب ذہن نشین کر لینا چاہیئے کہ مہ حسب صراحت بالا اُن دو واسطوں کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے جن میں سے شعاع گزرتی ہے اور تیز نور کی نوعیت پر بھی منحصر ہوتا ہے۔ مثلاً نیلے رنگ کی روشنی کی شعاع کے لیے مہ مختلف ہوگا اور سرخ رنگ کی روشنی کی شعاع کے لیے مختلف اگرچہ واسطے دونوں صورتوں میں وہی ہوں۔ ہمیں صرف کرۂ ہوائی کے انعطاف پر غور کرنا ہے اور اس صورت میں انتشار (جیسا کہ یہ مظہر کہلاتا ہے) اس قدر بڑا نہیں ہوتا کہ عملی علم ہیئت کے مقاصد کے لیے اس پر توجہ کرنا ضروری ہو جائے۔ اس لیے ہم مہ کی ایک اوسط قیمت لیتے ہیں جو کافی طور پر صحیح ہوگی اگرچہ نور کی وہ شعاعیں جن سے ہمیں واسطہ رہے گا ترکیبی نوعیت کی ہوں۔ زمین کی سطح پر کرۂ ہوائی کا انعطاف نما ۰ سمی تپش اور ۷۶۰ ممر دباؤ پر ۲۹۴ ۱۰۰۰ لیا جاتا ہے۔

اگر شعاع کی سمت اُلٹ دی جائے یعنی اگر شعاع ق سے ابتدا کر کے واسطہ ک ک میں سے ہوتی ہوئی و تک جائے اور وہاں سے واسطہ ھ ھ میں داخل ہو تو شعاع واسطہ ھ ھ کو ٹھیک اُسی راستہ و ا پر سے گذرتی ہوئی عبور کرے گی۔ یہ اُس عام خاصیت کی صرف ایک مخصوص صورت ہے کہ وہ منحنی یا شکستہ خط جس کو کوئی کرن مختلف واسطوں میں سے انعطافوں کے ایک سلسلے کے زیر اثر اور کسی وقوعوں پر اختیار کرتی ہے اُس وقت بھی اختیار کرے گی جبکہ نور کی اشاعت کی سمت الٹ دی جائے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ک ک کی نچلی سطح اوپر کی سطح کے متوازی ہو تو شعاع، واسطہ ھ ھ کی ایک دوسری تہ کے اندر ق پر داخل ہو کر سمت ق ا اختیار کرے گی جو وقوع کی سمت ا و کے متوازی ہوگی۔ پس ہمیں معلوم ہوا کہ نور کی شعاع جب متوازی رخوں والی ایک متجانس تختی میں سے گذرتی ہے تو تختی سے باہر نکل کر پھر اپنی سمت اختیار کر لیتی ہے اگرچہ وہ بلا شبہ ذرا بازو ہٹ جائے گی۔ ہمیں

چونکہ صرف شعاعوں کی سمتوں سے واسطہ ہے اس لیے اس کا بازو ہٹ جانا قابل توجہ نہیں ہے۔

فرض کرو کہ شعاع واسطہ ہ۰ سے ہ۱ میں جاتی ہے تو انعطاف نما م۱ ہے شکل (۳۹) اور ہ۰ سے ہ۲ میں جاتی ہے تو انعطاف نما م۲ ہے۔ یہ معلوم کرنا مقصود ہے کہ شعاع واسطہ ہ۱ سے ہ۲ میں جائے تو انعطاف نما کیا ہوگا۔

شکل (۳۹)

شعاع ہ۰ سے ہ۱ اور ہ۲ کی متوازی تختیوں میں سے ہوتی ہوئی ہ۰ پر اپنی اصلی سمت کے متوازی سمت میں خارج ہوتی ہے، اور اگر وقوع کے متواتر زاوئے سا، فہ، طہ ہوں تو پہلے وقوع اور آخری خروج سے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:—

جب سا = م۱ جب فہ اور جب سا = م۲ جب طہ

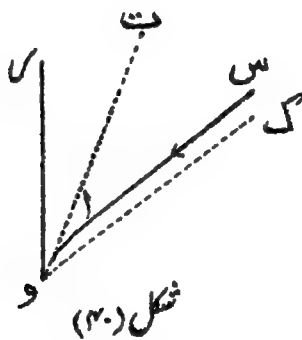
اس لیے م۱ جب فہ = م۲ جب طہ

اس طرح حسب ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے:—

اگر ایک معیاری واسطہ سے دوسرے واسطہ میں جانے کا انعطاف نما م۱ ہو اور معیاری واسطہ سے ایک اور واسطہ ہ۲ میں جانے کا انعطاف نما م۲ ہو اور اگر ہ۱ سے ہ۲ میں راست گذرنے والی ایک شعاع کا وقوع کا

زاویہ فہ ہواور زاویہ انعطاف طہ ہوتو مہ$_1$ جب فہ = مہ$_2$ جب طہ اور ھ$_1$ سے ھ$_2$ میں راست گذرنے والی ایک شعاع کے لیے انعطاف نما مہ$_2$/مہ$_1$ ہے۔

۴۰ ــ ہیئتی انعطاف ـ

کسی جرم فلکی سے نور کی شعاعیں جب بیرونی فضاء سے ہوتی ہوئی زمین کے کرۂ ہوائی میں سے گذرتی ہیں تو وہ ہیئتی انعطاف (Astronomical refraction) سے متاثر ہوتی ہیں۔ کرۂ ہوائی کے اوپر کے طبقات میں ہوا کی کثافت اس قدر کم ہوتی ہے کہ مجموعی انعطاف میں ان کی وجہ سے بہت کم اضافہ ہوتا ہے۔ وہ انعطاف جس سے ہیئت داں کو خاص طور پر واسطہ رہتا ہے زمین کی سطح کے اوپر صرف چند میل کے اندر وقوع پذیر ہوتا ہے۔ انعطاف کی باعث کسی ستارہ سے نکلی ہوئی نور کی شعاع کرۂ ہوائی میں سے ایک خط مستقیم میں نہیں گذرتی۔ یہ ایک منحنی پر چلتی ہے اور اس لیے جب اس کی شعاعیں مشاہد تک پہنچتی ہیں تو ستارہ اسے ایسی سمت میں دکھائی دیتا ہے جو اس کی اصلی سمت نہیں ہوتی۔

شکل (۴۰)

دور کے کسی ستارے سے ہماری جانب سمت س ا (شکل ۴۰) میں آنے والی نور کی شعاع سیدھی راہ پر چلتی ہے یہاں تک کہ وہ

ا پر مؤثر کرۂ ہوائی میں داخل ہو اور پھر یہاں سے اس کی راہ سیدھی نہیں رہتی۔ ا سے مشاہد کے مقام و تک یہ شعاع کرۂ ہوائی کی ایسی تہوں میں سے گذرتی ہے جن کی کثافت مسلسل بڑھتی ہے اور اس لیے شعاع مقام و تک پہنچنے میں زیادہ اور زیادہ ترخمی ہوتی جاتی ہے۔ مشاہد کو معلوم ہوتا ہے کہ شعاعیں ت سے آرہی ہیں جہاں و ت، و پر منحنی کا مماس ہے۔ اگر و میں سے خط و ک، ا س کے متوازی کھینچا جائے تو اس خط سے وہ سمت معلوم ہوگی جس میں ستارہ نظر آتا اگر کوئی انعطافی خلل واقع نہ ہوتا۔ پس کسی جرم سماوی پر انعطاف کا اثر یہ ہوتا ہے کہ اس کا ظاہری مقام بقدر زاویہ ت و ک کے مشاہد کے راس سر کی جانب اوپر حرکت کرتا ہے۔

انعطاف بڑے سے بڑا افق پر ہوتا ہے جہاں اس کی باعث اجرام فلکی تقریباً ۳۵َ اوپر اٹھے ہوئے نظر آتے ہیں۔

پس کسی جرم فلکی کے مشاہدہ کردہ محددوں میں بالعموم تصحیحات عمل میں لانی ہوں گی تاکہ ان تصحیحات کے بعد یہ معلوم ہو جائے کہ محدد کیا ہیں جبکہ انعطاف نہ ہو۔ اس لیے انعطاف کے اثرات کی تحقیق عملی علم ہیئت کا ایک اہم جزو ہے۔

ایک تقریبی جدول یہاں دیجاتی ہے جس سے یہ معلوم ہوگا کہ انعطاف ستاروں کے راسی فاصلوں کو کتنا گھٹاتا ہے۔ یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ بارپیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہے اور تپش ۵۰° فارن ہائٹ ہے۔ دیکھو نیوکومب کی اسفریکل اسٹرانومی صفحہ ۲۳۴۔

ظاہری راسی فاصلہ	انعطاف	ظاہری راسی فاصلہ	انعطاف	ظاہری راسی فاصلہ	انعطاف
۰°	۰″	۳۵°	۴۱″	۷۰°	۲′ ۳۹″
۵°	۵″	۴۰°	۴۹″	۷۵°	۳′ ۳۴″
۱۰°	۱۰″	۴۵°	۵۸″	۸۰°	۵′ ۱۹″
۱۵°	۱۶″	۵۰°	۱′ ۹″	۸۵°	۹′ ۵۱″
۲۰°	۲۱″	۵۵°	۱′ ۲۳″	۸۷°	۱۴′ ۲۳″
۲۵°	۲۷″	۶۰°	۱′ ۴۱″	۸۸°	۱۸′ ۱۶″
۳۰°	۳۴″	۶۵°	۲′ ۴″	۸۸° ۴۰′	۲۲′ ۲۳″

مثلاً ۵۰° کے راسی فاصلہ پر ہم دیکھتے ہیں کہ انعطاف ۱′ ۹″ ہے اور اسلیے صحیح راسی فاصلہ ۵۰° ۱′ ۹″ ہے۔ یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ کسی راسی فاصلہ کے لیے جو ۴۵° سے کم ہو انعطاف ۱′ کے برابر بھی نہیں ہے اور ۲۰° تک کے راسی فاصلوں کے لیے انعطاف عملاً ۱″ فی درجہ ہے۔

۴۱ — ہوائی انعطاف کا عام نظریہ۔

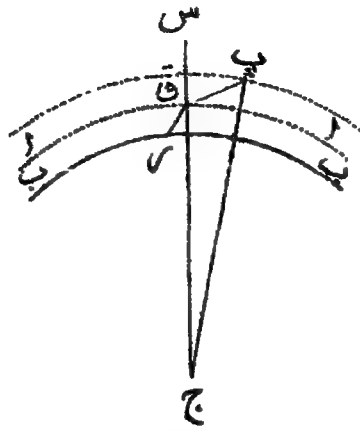
ہم فرض کریں گے کہ زمین کروی ہے اور کرۂ ہوائی پتلی تہوں کے ایک سلسلہ سے ترکیب یافتہ ہے جو زمین کے ہم مرکز کروں سے محدود ہیں ہوا کا انعطاف نما ہر تہہ کے پورے جثہ میں مستقل ہونا چاہیے لیکن ایک تہہ سے دوسری تہہ میں وہ متغیر ہو سکتا ہے۔

ایسی دو تہوں ا اور ب (شکل ۴۱) پر غور کرو۔ آزاد اثیر کے لحاظ سے بیرونی تہہ ا کا انعطاف نما مہ′ اور تہہ ب کا انعطاف نما مہ ہے۔ ایک شعاع جو ا میں سے سمت پ ق میں گذرتی ہوئی ب کے اندر داخل ہوتی ہے تو وہ سمت ق ر میں مڑ جاتی ہے

(۱۲۱) فرض کرو کہ زمین کا مرکز ج ہے اور

شکل (۴۱)

سا = ∠ س ق پ، فہ$_1$ = ∠ ق پ ج، فہ$_2$ = ∠ ر ق ج،

ج پ = ر$_1$، ج ق = ر$_2$

اب چونکہ ج ق، سطح فاصل پر عمود ہے اِس لیے انعطاف کے اصولوں (دفعہ ۳۹) کی رو سے

مہ$_1$ جب سا = مہ$_2$ جب فہ$_2$

لیکن مثلث پ ج ق سے

جب سا : جب فہ$_1$ = ر$_1$: ر$_2$

پس سا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ر$_1$ مہ$_1$ جب فہ$_1$ = ر$_2$ مہ$_2$ جب فہ$_2$

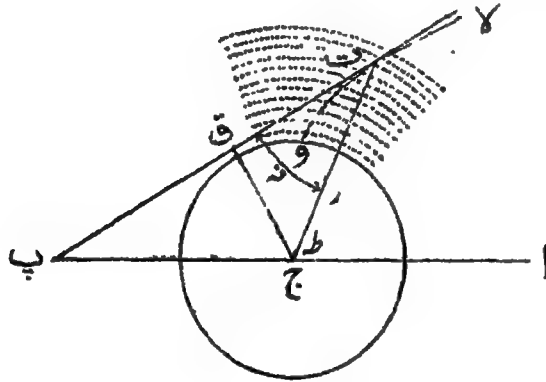
یہ کسی دو متصل تہوں کے لیے درست ہوگا اور اس لیے ہمیں حسب ذیل عام مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کرۂ ہوائی پتلی کروی متجانس تہوں کی ایک تعداد سے ترکیب

یا فتہ سمجھا گیا ہے اور یہ تہیں زمین کے ہم مرکز ہیں اور ایک تہہ سے دوسری
تہہ میں کثافت متغیر ہوتی ہے۔ جب کوئی شعاع متواتر تہوں کو عبور کرتی
ہے تو انعطاف کے زاویہ کی جیب، تہہ کا نصف قطر اور اس کا انعطاف نما
ان تینوں کا حاصل ضرب مستقل رہتا ہے۔

ہم اس مسئلہ کو حسب ذیل ضابطہ کی شکل میں بیان کر سکتے ہیں:۔

ر م جب ف = ا م جب ی .... (۱)

جہاں ظاہری راسی فاصلہ ی ہے، زمین کا نصف قطر ا ہے اور سب سے
نچلی تہہ کا انعطاف نما م ہے۔

شکل (۴۲)

اگر ہم یہ فرض کریں کہ تہیں لا انتہا پتلی ہیں تو شعاع کا راستہ ایک
شکستہ خط ہونے کی بجائے ایک منحنی ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ منحنی لا ت و (شکل ۴۲)
ہے جبکہ شعاع ان متواتر تہوں میں سے گذرتی ہے اور زمین پر و پر پہنچتی ہے (۱۴۲)
اس منحنی کے نقطہ ت پر مماس ت ق پ کھینچو جہاں ت وہ نقطہ
ہے جس پر ایک شعاع ایک تہہ میں داخل ہوتی ہے جس کا انعطاف
نما م ہے اور نصف قطر ر۔ یہ مماس شعاع کے ایک چھوٹے جزو کے
ساتھ منطبق ہوتا ہے اور اس لیے زاویہ ج ت ق = ف یعنے انعطاف کا
زاویہ۔ جب شعاع کرۂ ہوائی کے طبقات میں اول داخل ہوتی ہے تو

منحنی کا مماس ستارے کی اصلی سمت پر منطبق ہونا چاہیے ۔ برخلاف اس کے و پر اس منحنی کا مماس وہ سمت ظاہر کرتا ہے جس میں شعاع مشاہد کی آنکھ میں داخل ہوتی ہے ۔ ان دو مماسوں کا درمیانی زاویہ شعاع کی سمت میں مجموعی تبدیلی کا اظہار کرتا ہے ۔ یہ وہ مقدار ہے جس کی تعیین ہم کرنا چاہتے ہیں کیونکہ اسی کو ہم بالعموم انعطاف کہتے ہیں ۔

اگر یہ انعطاف غہ ہو تو دو متصل مماسوں کا درمیانی زاویہ فرغہ ہے جو = فرطہ ۔ فرفہ اگر طہ = ∠ ا ج ت ا اور فہ = ∠ ج ت پ ۔ علم ہندسہ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ فرطہ = ۔ مس فہ فرر\ر ، اس لیے

فرغہ = ۔ مس فہ فرر\ر ۔ فرفہ

اب ہم اس مساوات کو مساوات (۱) کے ذریعہ تحلیل کر سکتے ہیں ۔ مساوات (۱) لکھی جا سکتی ہے

لوک ر + لوک مہ + لوک جب فہ = مستقل

اسے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

فرر\ر + فرمہ\مہ + مم فہ فرفہ = ؛ .... (۲)

اس لیے فرغہ = مس فہ فرمہ\مہ .... (۳)

(۱) کی مدد سے مس فہ کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرغہ} = \frac{1}{\text{مہ}} \cdot \frac{\text{ا مہ جب ی}}{\text{مہ} \left(\text{ر}^2 \text{مہ}^2 - \text{ا}^2 \text{مہ}^2 \text{جب}^2 \text{ی}\right)^{\frac{1}{2}}} \;\text{فرمہ}$$

اس طرح ہمیں انعطاف کے لیے تفرقی مساوات مل جاتی ہے ۔

۴۲ ۔ انعطاف کی محصلہ تفرقی مساوات کا تکمل ۔

انعطاف کو صحیح طور پر معلوم کرنے کے لیے اس مساوات کو حدود مہ = مہ۰ اور مہ = ۱ کے درمیان تکمل کرنا ہوگا جہاں مہ = ۱ وہ قیمت ہے جو

کرۂ ہوائی کی اوپر کی تہہ پر مہ کی ہے - اِس منزل پر انعطاف کے نظریہ میں جو مشکل ہے وہ خود پیش ہوتی ہے[1] - وہ جملہ جسے تکمل کرنا ہے (۱۲۴) دو متغیر ر اور مہ رکھتا ہے جن میں تعلق پیدا کرنا ضروری ہے - اگر اِس تعلق کا قانون معلوم ہوتا تو ہم ر کو مہ کی رقوم میں بیان کر سکتے اور اِس طرح مسئلہ صرف یہ رہ جاتا کہ مہ کے کسی خاص تفاعل کا تکمل کیا جائے - لیکن ہمیں اُس قانون کے متعلق ٹھیک معلومات حاصل نہیں ہیں جس کی بموجب انعطاف نما' زمین کی سطح کے اوپر ارتفاع کے ساتھ متغیر ہوتا ہے - تاہم یہ معلوم کرنا دلچسپی سے خالی نہیں کہ اِس مسئلہ کا ایک تقریبی حل حاصل کرنا ممکن ہے جو اکثر عملیاتی مقاصد کے لیے اُس قانون کے علم کے بغیر بالکل کافی ہے جس کے بموجب کرۂ ہوائی کی کثافت' زمین کی سطح کے اوپر ارتفاع کے ساتھ بدلتی ہے -

ہم مان لیتے ہیں کہ ر۰/ر = ۱ + س جہاں س ایک چھوٹی مقدار ہے کیونکہ کرۂ ہوائی کے بلند ترین حصہ کا ارتفاع بھی بمقابلہ زمین کے نصف قطر کے چھوٹا ہے - ہم ر۰/ر کی بجائے اِس کی یہ قیمت فرغہ کے جملہ میں درج کریں گے اور س کی ایک سے اعلیٰ تر قوتوں کو نظر انداز کرینگے - اسطرح

$$\text{غہ} = \int_{۱}^{\text{مہ}_۰} \frac{\text{مہ}_۰ \,\text{جب}\, \text{ی}_۰ \,\text{فر}\, \text{مہ}}{\text{مہ}\left(\text{مہ}^۲ - \text{مہ}_۰^۲ \,\text{جب}^۲ \text{ی}_۰ + ۲\,\text{س}\,\text{مہ}^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$= \int_{۱}^{\text{مہ}_۰} \frac{\text{مہ}_۰ \,\text{جب}\, \text{ی}_۰ \,\text{فر}\, \text{مہ}}{\text{مہ}\left(\text{مہ}^۲ - \text{مہ}_۰^۲ \,\text{جب}^۲ \text{ی}_۰\right)^{\frac{۱}{۲}}} \left(۱ + \frac{۲\,\text{س}\,\text{مہ}^۲}{\text{مہ}^۲ - \text{مہ}_۰^۲ \,\text{جب}^۲ \text{ی}_۰}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

---

[1] اِس مساوات کے تکمل کی عام بحث اس قدر دقیق ہے کہ اس کا اندراج یہاں نامناسب ہے - اِس کا مطالعہ پروفیسر نیوکومب کی (Comp. of sph. Astro.) اور پروفیسر کیمبل کی (Practical Astro) میں کیا جا سکتا ہے - بیسل کی دقیق اور جامع تحقیقات کا ذکر برنو کی (Sph. Astro.) میں ملیگا - میں پروفیسر ای - ٹی - وہٹیکر کا بے ممنون ہوں کہ انہوں نے اُس نفیس تقریبی طریقہ کی طرف میری توجہ منعطف کی جو یہاں درج ہے -

$$= \int_{1}^{\text{مہ}} \frac{\text{مہ جب ی فر مہ}}{\text{مہ}\,(\text{مہ}^2 - \text{مہ}^2\,\text{جب}^2\,\text{ی})^{\frac{1}{2}}} - \int_{1}^{\text{مہ}} \frac{\text{س مہ مہ جب ی فر مہ}}{(\text{مہ}^2 - \text{مہ}^2\,\text{جب}^2\,\text{ی})^{\frac{3}{2}}}$$

پس انعطاف دو تکملوں سے بیان ہوتا ہے جن میں سے پہلا جو اہم ترین حصہ ہے یہ ظاہر کرتا ہے کہ انعطاف کیا ہوگا اگر س = ۰ یعنے اگر زمین کی سطح مستوی ہوتی - یہ صریحاً ایک مشہور ابتدائی تکملہ ہے اور اس کی قیمت ہے

$$\text{جب}^{-1}(\text{مہ. جب ی}) - \text{ی}$$

اگر ہم چھوٹی مقدار (مہ - ۱) کو لا سے تعبیر کریں تو یہ تکملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\text{جب}^{-1}\{(1 + \text{لا})\ \text{جب ی}\} - \text{ی}$$

اور اگر اسے میکلارن کے مسئلہ سے لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو اس کو محسوب کرنے میں آسانی ہوگی اگر ہم لا کی دو سے اعلیٰ تر قوتوں کو نظر انداز کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ پہلے تکملہ کی تقریبی قیمت

$$(\text{مہ} - 1)\ \text{مس ی} + \tfrac{1}{2}(\text{مہ} - 1)^2\ \text{مس}^3\ \text{ی}$$ ہے -

دوسرے تکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ س، متکمل میں ایک جزو ضربی کے طور پر شریک ہوتا ہے اور اس لیے مہ = مہ = ۱ رکھنے سے کوئی قابل قدر خطا وقوع پذیر نہ ہوگی کیونکہ رتبہ س (مہ - ۱) کی مقداریں اس قدر چھوٹی ہیں کہ نظر انداز ہو سکتی ہیں - پس دوسرا تکملہ ذیل کی سادہ شکل اختیار کرتا ہے (۱۲۴)

$$- \frac{\text{جب ی}}{\text{جم}^3\ \text{ی}} \int_{1}^{\text{مہ}} \text{س فر مہ}$$

فرض کرو کہ کرۂ ہوائی کے اُس خول کی کثافت ث ہے جس کا انعطاف نما مہ ہے - تب گلاڈسٹوں اور ڈیل کے کُلیہ کی رو سے مہ اور ث شکل

$$\text{مہ} - 1 = \text{م ث}$$

کی ایک مساوات سے مربوط ہوں گے جہاں م ایک مستقل مقدار ہے - اسلیے

$$\text{فر مہ} = \text{م} \times \text{فر ث}$$

اگر زمین کی سطح پر ہوا کی کثافت ش̄ ہو تو یہ تکملہ

$$-\text{م}\,\frac{\text{جب ی}}{\text{جم}^{\text{۳}}\,\text{ی}}\int_{\text{٠}}^{\text{ش̄}}\text{س فرش}$$

ہو جاتا ہے تکمیل بالحصص سے یہ تکملہ

$$-\text{م}\,\frac{\text{جب ی}}{\text{جم}^{\text{۳}}\,\text{ی}}\int_{\text{٠}}^{\text{س̄}}\text{ش فرس}$$

ہو جاتا ہے کیونکہ وہ رقمیں جو تکملہ سے متاثر نہیں ہوتیں معدوم ہوتی ہیں۔ نیز ہم رکھتے ہیں س = س̄ جبکہ ش = ٠، اور س = ٠ جبکہ ش = ش̄۔ اس جملہ کا تکملہ ایک قابلِ یادداشت اہمیت رکھتا ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس سے ہوا کی وہ کل کمیت تعبیر ہوتی ہے جو سطح زمین کے ایک اکائی رقبہ کے اوپر انتصاباً واقع ہے اور اس لیے کرۂ ہوائی کے دباؤ کے متناسب ہے یعنے باریپما کے ارتفاع کے متناسب۔ اس لیے اس اصلی قانون کی جس کی بموجب کرۂ ہوائی کی کثافت ارتفاع کے ساتھ متغیر ہوتی ہے اب اس سوال میں ضرورت نہیں رہتی۔

اس طرح انعطاف کے نظری جملہ نے ایک بہت ہی سادہ شکل اختیار کر لی۔ یہ دو تکملوں کے درمیان فرق ہے جن میں سے پہلا معلوم کیا جا چکا ہے اور دوسرا

$$\text{مس ی} + \text{مس}^{\text{۳}}\text{ی}$$

کے متناسب ہونا چاہئے۔ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل انعطاف شکل ا مس ی + ب مس³ ی کا ہونا چاہئے جہاں ی ظاہری راسی فاصلہ ہے اور ا، ب مستقل مقداریں ہیں۔ ان مستقلوں کی قیمتیں مشاہدے سے متعین کرنی ہوں گی جیسا کہ دفعہ ۴۶ میں ظاہر کیا جا چکا ہے۔

ر اور مہ کے درمیان تعلق کی نسبت ہم مختلف مفروضات بھی

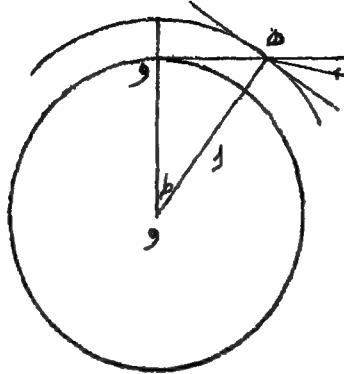
مان سکتے ہیں اور ان کی بموجب محسوبہ نتیجوں کا مقابلہ اُن نتیجوں کے ساتھ کر سکتے ہیں جو راست مشاہدے سے حاصل ہوئے ہوں ۔ یہ امر قابل غور ہے کہ ر اور مہ کے درمیان متعدد مختلف رشتے ایسے ہیں کہ ہر ایک سے انعطاف کا ایک نظریہ ملتا ہے اور اس کی بموجب محسوبہ نتیجے مشاہدے سے حاصل کئے ہوئے نتیجوں کے ساتھ کافی طور پر مطابق ہوتے ہیں ۔ (۱۲۵)

۴۴ ۔ کرۂ ہوائی کے انعطاف کے لئے کیسینی کا ضابطہ

کیسینی کے مفروضہ سے جس میں کرۂ ہوائی کو متجانس فرض کیا جاتا ہے انعطاف کے لیے ایک جملہ حاصل کیا جا سکتا ہے جو عملاً اُس جملہ کے مماثل ہے جو ابھی ہم نے معلوم کیا ہے ۔ بلاشبہ یہ مفروضہ غیر صحیح ہے لیکن یہ یاد رکھنا چاہئے کہ اگر زمین کی سطح منحنی ہونے کی بجائے مستوی ہوتی تو کرۂ ہوائی کی متواتر تہیں متوازی رُخ والی ہوتیں اور اس لیے سب سے نچلی تہ کے انعطاف نما سے ہی کُل انعطاف کی تعیین ہو جاتی (دفعہ ۳۹) ۔ پس صرف زمین کا انحنا ہی ہے جو کیسینی کے نظریہ سے حاصل ہونے والے ضابطہ کو بالکل درست ہونے میں خارج ہے ۔

یہ باور کرنے کے عمدہ وجوہ موجود ہیں کہ بیس میل کے ارتفاع پر کرۂ ہوائی کی کثافت، زمین کی سطح پر اس کی کثافت کے تیسویں حصہ سے بھی کم ہے ۔ اس لیے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ تقریباً سارا انعطاف زمین کی سطح کے اوپر بیس میل کے اندر پیدا ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ مشاہد کا مقام و (شکل ۴۳) ہے اور و ھ ایک شعاع ہے جو و پر افقی سمت میں پہنچتی ہے، ایسی کسی شعاع پر بلاشبہ کسی دوسری شعاع کی بہ نسبت انعطاف کا زیادہ اثر ہوگا ۔

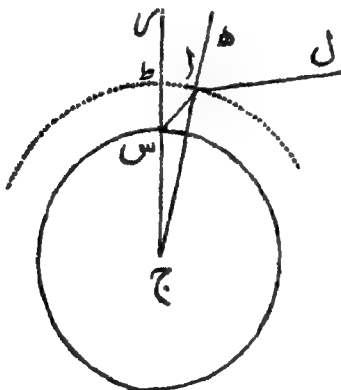
فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ا ہے اور کرۂ ہوائی کے اُس خول کا نصف قطر ا + ل ہے جس پر شعاع نقطہ ھ پر آکر پڑتی ہے ۔

شکل (۴۳)

اگر و اور ھ پر خولوں کے
مماسوں کا درمیانی زاویہ
طہ ہو اور اگر ھ و کو ایک
خط مستقیم تسلیم کیا جائے تو

جب² طہ = ۱ - اُ² \ (۱ + ل)²

= ۲ل\۱ = ۴۰\۴۰۰۰

= ۱\۱۰۰

اس لیے طہ تقریباً ۶° ہے۔
اس طرح مختلف کثافتوں
کی ہوا کی موثر تہیں جن میں سے شعاعوں کو گذرنا ہوگا اس قدر تقریباً متوازی ہیں کہ ان میں سے کسی کو بھی ٹھیک طور پر متوازی بنانے کے لیے ۶° سے بڑے زاویہ میں سے گھمانا نہ پڑے گا۔ اس لیے ہم حقیقت سے زیادہ دور نہ ہوں گے اگر یہ مان لیں کہ کرۂ ہوائی افقی تہوں پر مشتمل ہے۔ ایسی صورت میں کرۂ ہوائی کے غیر متجانس ہونے سے کل انعطاف پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

شکل (۴۴)

راسی فاصلہ کو انعطاف کے
ساتھ مربوط کرنے والا ضابطہ مفروضہ
متجانس کرۂ ہوائی کی صورت میں
کیسینی نے حاصل کیا ہے جو حسب
ذیل ہے۔
ہم مان لینگے کہ کرۂ ہوائی کو
اُس فضاء میں کثیف کر دیا گیا ہے
جو نصف قطر ج س اور ج ط
کے دو کروی خولوں کے درمیان ہے۔

کرۂ ہوائی کی کثافت کو یکساں اور اس کے انعطاف نما کو مہ فرض کیا جاتا ہے ۔

شعاع ل ا، کرۂ ہوائی کی سطح کے نقطہ ا پر پڑتی ہے جس پر اس سطح کا عماد ج ا ھ ہے اور یہ شعاع زمین کی سطح کے نقطہ س پر مشاہد تک پہنچتی ہے، پس زاویہ ل ا ھ = سا وقوع کا زاویہ ہے اور زاویہ س ا ج = فہ انعطاف کا زاویہ ہے ۔

شعاع سمت ا س میں مشاہد تک پہنچتی ہے اور اس لیے زاویہ ا س ط = ی جرم کا ظاہری راسی فاصلہ ہے ۔ اگر حسب سابق ا سے زمین کا نصف قطر تعبیر ہو اور کرۂ ہوائی س ط کی موٹائی ل سے ظاہر کی جائے تو مثلث س ج ا سے

(۱ + ل\ا) جب فہ = جب ی ،

اور نیز　　جب سا = مہ جب فہ

اس لیے　　جب سا = مہ (۱ - ل\ا) جب ی ،　بڑی حد تک

کیونکہ ل/ا ایک چھوٹی مقدار ہے جو ۱/۸۰۰ سے کم محسوب ہوئی ہے ۔

اگر کل انعطاف غہ ہو یعنی موقوعہ شعاع اپنی اصلی سمت سے بقدر زاویہ غہ کے مڑ چکی ہو تو سا = فہ + غہ اور یہ فرض کرکے کہ غہ کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

غہ جب ۱″ = (جب سا - جب فہ) قط فہ

اب جب سا، جب فہ، جم فہ کی بجائے علی الترتیب جملے

مہ (۱ - ل\ا) جب ی، (۱ - ل\ا) جب ی، √(۱ - (۱ - ل\ا)² جب² ی)

درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

غہ = (مہ - ۱) قم ۱″ × (۱ - ل\ا) جب ی ÷ {۱ - (۱ - ل\ا)² جب² ی}^½　　(۱۲۷)

= (مہ - ۱) قم آ { مس ی - (مس ی + مس۳ ی) ل \ ا }

= ا مس ی + ب مس۳ ی .... (۱)

جہاں ا = (مہ - ۱) (۱ - ل \ ا) قم آ ،

ب = - (مہ - ۱) ل \ ا قم آ

یہ ضابطہ جو اِس دفعہ اور پچھلے دفعہ کے مختلف اعمال سے حاصل کیا گیا ہے عملی طور پر قابل استعمال ہوگا اگر ہم ا اور ب کی عددی قیمتیں حاصل کر لیں۔ یہ عددی قیمتیں کم از کم دو مخصوص صورتوں میں (دیکھو دفعہ ۴۶) انعطاف کا راست مشاہدہ کرکے حاصل کی جاتی ہیں چنانچہ ہم یہ مان لیں گے کہ اِس طرح ہمیں یہ معلوم ہوا ہے کہ تپش ۵۰° فارن ہائیٹ اور دباؤ ۳۰ انچ پر انعطاف، ظاہری راسی فاصلوں ۵۴° اور ۷۴° پر علی الترتیب ۸۰٫۰۶″ اور ۲۰۰٫۴۶″ ہیں۔

اس طرح ضابطہ (۱) سے ا اور ب معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل دو مساواتیں ملیں گی

۸۰٫۰۶″ = ا (مس ۵۴°) + ب (مس ۵۴°)۳ ،

۲۰۰٫۴۶″ = ا (مس ۷۴°) + ب (مس ۷۴°)۳

اِن مساواتوں کو حل کرنے سے اوسط دباؤ ۳۰ انچ اور تپش ۵۰° ف پر انعطاف کے لیے حسب ذیل عام جملہ حاصل ہوتا ہے

غہ = ۵۸٫۲۹۴″ مس ی - ۰٫۰۶۶۸۲″ مس۳ ی ...... (۲)

اس طرح ب \ ا صرف ۱ \ ۸۷۳ ہے اور اس لیے ہم دوسری رقم کو نظرانداز کر سکتے ہیں سوائے اُس صورت کے جبکہ مس۳ ی بہت بڑا ہو یعنے جبکہ جرم افق کے قریب ہو۔

اگر راسی فاصلہ ۷۰° سے متجاوز نہ ہو تو اکثر مقاصد کے لیے جبکہ انتہائی تپشیں شامل نہ ہوں انعطاف کو کافی صحت کے ساتھ اِس سادہ جملہ

ک مس ی

سے محسوب کیا جا سکتا ہے۔ یہاں صرف پہلی رقم استعمال کی گئی ہے اور دوسری رقم جس میں مس ۳ ی شامل ہے نظرانداز کر دی گئی ہے، اس لیے کہ ک کو ۵۸٫۲۹۴″ لینے کی بجائے ۵۸٫۲″ لینا قدرے زیادہ صحیح ہے۔ اس مقدار ک کو انعطاف کا مسر کہتے ہیں۔

مثال ۱۔ بتاؤ کہ کرۂ ہوائی کی موٹائی کیا ہونی چاہئے کہ جس سے انعطاف کے لیے ایسا جملہ ملے جو مشاہدے کے مطابق ہو۔

- ب\ا = ل\ا -

اس لیے ل\ا = ۵۸٫۲\۲۰۶۲۶۵ = ۱\۳۵۴۳ (۱۲۸)

اس لیے ا = ۳۹۵۰ میل لینے سے ل = ۱۴٫۵ میل۔

مثال ۲۔ بتاؤ کہ دباؤ ۳۰ انچ اور تپش ۵۰° فارن ہائٹ پر کرۂ ہوائی کا انعطاف نما کیسینی کے نظریہ کی بموجب ۱٫۰۰۰۲۸۳ ہوگا۔

مثال ۳۔ ضابطہ (۲) سے بتاؤ کہ راسی فاصلہ ۶۱° ۴۸′ پر انعطاف ۱′ ۴۳٫۸″ ہے (دباؤ د = ۳۰″ اور تپش ت = ۵۰° فارن ہائٹ)۔

مثال ۴۔ بتاؤ کہ اگر وہ مقداریں جو ثانیہ کے پانچویں حصہ سے کم ہوں نظرانداز کر دی جائیں، تو انعطاف کے جملہ کی دوسری رقم ترک کی جا سکتی ہے جب کبھی راسی فاصلہ ۵۵° سے متجاوز نہ ہو۔

مثال ۵۔ اگر ہم انعطاف کو معمولی شکل ک مس ی میں جہاں ی ظاہری راسی فاصلہ ہے، بیان کرنے کی بجائے شکل کَ مس یَ میں بیان کریں جہاں یَ حقیقی راسی فاصلہ ہے تو ثابت کرو کہ اگر ک اور کَ دونوں قوس کے ثانیوں میں بیان کئے گئے ہوں تو

کَ = ک (۱ - ک قطا ی جب ۱″)

۴۴۔ کرۂ ہوائی کے انعطاف کے لیے دیگر ضابطے۔

یہ ظاہر ہے کہ ہوا کی کثافت گھٹتی جاتی ہے جیسے زمین سے اُس کا فاصلہ بڑھتا ہے۔ پس کرۂ ہوائی کا انعطاف نما ۱٫۰۰۰۲۹۴ سے

جو زمین کی سطح پر اِس کی قیمت ہے قیمت ا تک گھٹے گا جو انعطافی کرۂ ہوائی کے اوپر کے حدود پر اِس کی قیمت ہے۔

دفعہ ۱۴۱ کے مطابق فرض کرو کہ سب سے نچلی کرۂ ہوائی کی تہہ کا نصف قطر ا ہے جس کے لیے مہ = مہ۰ اور غہ اُس تہہ کا نصف قطر ہے جبکہ مہ گھٹ کر ایک ہو گیا ہے۔ سمپسن (Simpson.) نے یہاں لیا کہ ر مہ$^{ن+۱}$ = رَ جہاں ن ایک مقدار ہے جو فی الحال غیر معلوم ہے۔

مفروضہ مساوات سے ر = رَ حاصل ہوتا ہے جبکہ مہ = ا۔ اِس کا مساوات کی ترکیب میں اولاً خیال رکھا گیا تھا۔ جیسے ر بڑھتا ہے مہ گھٹنا چاہیے اور یہ اُس صورت میں ہوگا جبکہ (ن + ۱) مثبت ہو۔

ہم دفعہ ۱۴۱ میں دیکھ چکے ہیں کہ مہ ر جب فہ = مستقل۔ کرۂ ہوائی کے اوپر کے اور نیچے کے حدود کے لیے اِس حاصل ضرب کی جو قیمتیں ملتی ہیں اُن کو مساوی رکھنے سے

مہ۰ ا جب ی = رَ جب یَ

جہاں یَ بالاترین تہہ پر وقوع کا زاویہ ہے اور ی زیرترین تہہ پر وقوع کا زاویہ۔ رَ کی بجائے مساوات ر مہ$^{ن+۱}$ = رَ سے حاصل شدہ قیمت رکھی جائے تو

مہ۰ ا جب ی = ا مہ۰$^{ن+۱}$ جب یَ

اس لیے جب ی = مہ۰^{ن} جب یَ

یا یَ = جب$^{-۱}$ $\frac{\text{جب ی}}{\text{مہ۰}^{ن}}$

اب ر مہ$^{ن+۱}$ = رَ کا لوکارتمی تفرقی لینے سے (۱۲۹)

(ن+۱) $\frac{ر}{مہ}$ + $\frac{فر ر}{فر مہ}$ = ۰

اس لیے دفعہ ۱۴۴ کی مساوات (۲) سے

ن/مہ = حم فہ (فزفہ / فزمہ)

اور دفعہ ۱۴۱ کی مساوات (۳) سے

فزغہ / فزفہ = ۱/ن

انعطاف معلوم کرنے کے لیے ہمیں اس جملہ کو فہ کی ان قیمتوں کے درمیان تکمل کرنا ہوگا جو کرۂ ہوائی کے حدود پر لی گئی ہوں۔ زمین کی سطح پر انعطاف کا زاویہ ی ہے اور کرۂ ہوائی کی اوپر کی حد پر انعطاف کا زاویہ

جب⁻¹ (جب ی / مہن)

ہے۔ اس لیے انعطاف کے لیے سمپسن کا حسب ذیل ضابطہ حاصل ہوتا ہے

غہ = ۱/ن {ی - جب⁻¹ (جب ی / مہن)}

مثال ۱ ـــ اگر مہن = ۱ + سہ جہاں سہ ایک چھوٹی مقدار ہو جس کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جا سکتی ہیں تو ثابت کرو کہ سمپسن کے ضابطہ سے انعطاف کے لیے حسب ذیل تقریبی جملہ حاصل ہوتا ہے

غہ = (سہ/ن - سہ²/ن) مس ی - (سہ²/۲ن) مس³ ی

مثال ۲ ـــ یہ مان کر کہ مشاہدہ سے انعطاف کا کلیہ (دفعہ ۱۴۲)

غہ = ۲۹۴ء۵۸″ مس ی - ۰۶۶۸۲ء۰″ مس³ ی

حاصل ہوتا ہے ثابت کرو کہ سمپسن کے ضابطہ سے زمین کی سطح پر ہوا کے انعطاف نما مہ کی قیمت ۲۸...۰۰۰ر۱ حاصل ہوتی ہے اور نیز یہ کہ ن = ۸ اور

مہ۹ = ۱ر۱ر

مثال ۳ ـــ ثابت کرو کہ اگر سمپسن کا ضابطہ صحیح ہوتا تو کرۂ ہوائی کی

بلندی جہاں تک کہ وہ انعطاف کے لیے موثر ہے تقریباً دس میل ہوتی ۔

براڈلے (Bradley) نے ایک آسان ضابطہ سمپسن کے محصلۂ بالا ضابطے سے اخذ کیا ہے جو حسب ذیل ہے :۔ سمپسن کا ضابطہ ہے

$$\text{غہ} = \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{ی} - \text{جب}^{-1}\frac{\text{جب ی}}{\text{مہ}^{\text{ن}}}\right)$$

اسے لکھا جاسکتا ہے $\text{جب}(\text{ی} - \text{ن غہ}) = \text{جب ی} / \text{مہ}^{\text{ن}}$

اس لیے

$$\frac{\text{جب ی} - \text{جب}(\text{ی} - \text{ن غہ})}{\text{جب ی} + \text{جب}(\text{ی} - \text{ن غہ})} = \frac{\text{مہ}^{\text{ن}} - 1}{\text{مہ}^{\text{ن}} + 1}$$

یا چونکہ انعطاف ایک چھوٹی مقدار ہے اس لیے (۱۴۰)

$$\text{غہ} = \frac{2}{\text{ن}}\,\frac{\text{مہ}^{\text{ن}} - 1}{\text{مہ}^{\text{ن}} + 1}\,\text{مس}\left(\text{ی} - \frac{1}{2}\text{ن غہ}\right)$$

اگر ہم مثال ۲ صفحہ ۱۹۶ سے مہ اور ن کی دی ہوئی قیمتیں لیکر انھیں درج کریں تو تقریبی ضابطہ

$$\text{غہ} = ۵۹'' \,\text{مس}(\text{ی} - ۳\,\text{غہ})$$

حاصل ہوتا ہے ۔

ہم اس ضابطہ کی تصحیح اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ، معیاری تپش اور دباؤ پر دو معلومہ انعطافوں کے لیے ٹھیک ہو جائے، مثلاً اگر ہم لیں

$$\text{ی} = ۵۰^\circ،\quad \text{غہ} = ۶۹٫۳۶''$$

اور

$$\text{ی} = ۷۵^\circ،\quad \text{غہ} = ۲۱۴٫۱۰''$$

(دیکھو گرینوچ کی جدولیں) تو براڈلے کا ضابطہ شکل

$$\text{غہ} = ۵۸٫۳۶۱''\,\text{مس}(\text{ی} - ۳٫۱۰۹\,\text{غہ})$$

میں حاصل ہوتا ہے ۔ اس ضابطہ سے °۸۰ کے راسی فاصلہ تک سب انعطاف تقریبی طور پر معلوم کیے جاسکتے ہیں ۔

براڈلے کا ضابطہ افق کے قریب مشاہدات کے لیے موزوں ہے کیونکہ جب وقت ی کی قیمت °۹۰ کے قریب آتی ہے تو مس (ی - ۳٫۱۰۹ غہ)

لا انتہا بڑا نہیں ہو جاتا۔

مثال ۱ — بتاؤ کہ انعطاف کے لیے براڈلے اور کیسینی کے ضابطے

غہ = ۵۸،۳۶۱ً مس (ی - ۳،۰۹ غہ)

اور　غہ = ۵۸،۲۹۴ً مس ی - ۰،۰۶۶۸۲ً مس^۳ ی

عملاً مماثل ہیں بشرطیکہ راسی فاصلہ بہت بڑا نہ ہو۔

مثال ۲ — اِس مفروض کی بنا پر کہ کرۂ ہوائی کے انعطاف نما کی (ن + ۱) ویں قوت، زمین کے مرکز سے فاصلہ کے بالعکس بدلتی ہے ہیئتی انعطاف کے لیے براڈلے کا تقریبی ضابطہ

غہ = ا مس (ی - ½ ن غہ)

ثابت کرو۔

مثال ۳ — اگر کرۂ ہوائی میں کسی نقطہ پر انعطاف نما زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلے اور زمین کی سطح پر مبہ ہو اور کرۂ ہوائی کی حد پر اکائی ہو تو ثابت کرو کہ انعطاف کے لیے متناظر تصحیح

جب (ی + ½ غہ) = √مبہ جب ی

(Math. Trip. 1906)

سے حاصل ہوتی ہے۔

۴۵ — کرۂ ہوائی کے دباؤ اور اسکی تپش کا اثر انعطاف پر۔

انعطاف کے ضابطہ (۲) میں جو دفعہ ۴۳ میں حاصل کیا جا چکا ہے، ہم نے مان لیا تھا کہ بارپیما کا ارتفاع ۳۰ انچ اور بیرونی ہوا کی تپش ۵۰° فارن ہائٹ ہے۔ اب ہمیں وہ ضابطہ معلوم کرنا ہے جو دباؤ اور تپش کی دیگر دی ہوئی قیمتوں پر استعمال کرنا ہوگا۔

(۱۳۱)　ہم تسلیم کر لیتے ہیں کہ زمین کی سطح پر انعطاف ہوا کی کثافت کے متناسب ہے، اِس لیے اگر دباؤ د اور تپش ت پر انعطاف غہ ہو اور معیاری دباؤ ۳۰ انچ اور تپش ۵۰° پر انعطاف غہ ہو تو گیسوں کے

خواص سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{غہ}}{\text{غہ.}} = \frac{\text{د}}{\text{۳۰}} \cdot \frac{\text{۵۰+۴۶۰}}{\text{ت+۴۶۰}} = \frac{\text{۱۷ د}}{\text{ت+۴۶۰}}$$

غہ. کی وہ قیمت درج کرنے سے جو دفعہ ۴۲ میں معلوم ہوچکی ہے دباؤ د اور تپش ت پر ظاہری راسی فاصلہ ی کے لیے کرۂ ہوائی کے انعطاف کا تقریبی ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{غہ} = \frac{\text{۱۷ د}}{\text{ت+۴۶۰}} \left(\text{۵۸٫۲۹۴'' مس ی} - \text{۰٫۰۶۶۸'' مس}^{\text{۳}}\text{ ی}\right)$$

گرنیوچ آبزرویشنس (Gre.Observations) بابتہ ۱۸۹۸ء کے ضمیمہ میں مسٹر پی۔ ایچ کاویل (Cowell) نے انعطاف کی اُن جدولوں کو مرتب کیا ہے جو گرنیوچ کی رصدگاہ میں استعمال کی جاتی ہیں۔ ان جدولوں میں صفر درجہ سے ۸۰° ۴۰' تک راسی فاصلہ کے ہر منٹ کے لیے اوسط انعطافات ۳۰ انچ دباؤ اور ۵۰° فارن ہائٹ تپش کیلئے درج ہیں۔ وہ تصحیحات جو تپش اور دباؤ میں تغیرات واقع ہونے کی وجہ سے عمل میں لانی ہونگی دوسری جدولوں میں دی جاتی ہیں۔

۴۶ ۔ مُشاہدہ سے کرۂ ہوائی کے انعطاف کی تعیین۔

انعطاف کے جملہ ا مس ی + ب مس۳ ی کے سروں ا اور ب کو نصف النہاری راسی فاصلوں کا مُشاہدہ کرکے مختلف طریقوں پر متعین کیا جاسکتا ہے اِن میں سے تین طریقے ہم یہاں بیان کریں گے۔

پہلا اور دوسرا طریقہ ایک ہی رصدگاہ میں استعمال کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ رصدگاہ کا عرض بلد نہ تو بہت بڑا ہو نہ بہت چھوٹا۔ تیسرے طریقہ میں دو رصدگاہوں کی شرکتِ عمل ضروری ہے جن میں سے ایک شمالی نصف کرۂ زمین میں اور دوسری جنوبی نصف کرۂ زمین میں واقع ہو۔

پہلا طریقہ ۔ ایک ایسے ستارہ کا انتخاب کیا جاتا ہے جو بالائی اور زیرین دونوں تکبدوں کے وقت افق کے اوپر ہو۔ اگر بالائی اور زیرین تکبدوں پر ظاہری راسی فاصلے علی الترتیب ی، یَ ہوں اور یہ فاصلے راس کے شمال کی جانب مثبت ہوں تو اصلی راسی فاصلے

ی + ا مس ی + ب مس^۳ ی

اور

یَ + ا مس یَ + ب مس^۳ یَ

ہوں گے ۔ ان دو راسی فاصلوں کا اوسط وہی ہے جو راس سے شمالی قطب کا فاصلہ ہے یعنی عرض التمام ۔ پس ہمیں مساوات حاصل ہوتی ہے (۱۳۲)

۱/۲ {ی + یَ + ا (مس ی + مس یَ) + ب (مس^۳ ی + مس^۳ یَ)} = ۹۰° ـ فہ

ی اور یَ کی مشاہدہ کردہ قیمتیں درج کرنے سے تین مقداروں ا، ب اور فہ میں ایک خطی مساوات حاصل ہوتی ہے ۔

دوسرے ستاروں کا اسی طرح مشاہدہ کیا جاتا ہے اور ہر ستارے سے انہی تین مجہول مقداروں ا، ب اور فہ میں ایک خطی مساوات حاصل ہوتی ہے ۔ ایسی تین مساواتیں ا، ب اور فہ کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں ۔ بریں ہم نتیجہ زیادہ تر صحیح ہوگا اگر ہم بہت سے ستاروں کا مشاہدہ کریں اور پھر محصلہ مساواتوں پر اقل ترین مربعوں کا طریقہ استعمال کریں جو بعد میں بیان کیا جائے گا ۔

ایک سادہ مثال کے طور پر ہم ایک ایسی صورت لیں گے جس میں عرض بلد معلوم ہو اور جس میں چونکہ کوئی راسی فاصلہ بہت بڑا نہیں ہے اس لیے ہم یہ مان سکیں گے کہ انعطاف ایک ہی رقم ک مس ی سے بیان ہوتا ہے ۔

ڈنسنک (Dunsink.) میں جو شمالی عرض بلد ۵۳° ۲۳َ ۱۳ً پر واقع ہے ستارہ عہ قیقاؤس (a Cephei) کا مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ

بالائی تکبد پر ظاہری راسی فاصلہ ۸° ۴۸′ ۳۷″ ہے اور ۱۲ گھنٹوں کے بعد زیرین تکبد پر اس کا ظاہری راسی فاصلہ ۶۴° ۲۲′ ۴۷″ ہے۔
اِس لیے اصلی راسی فاصلے

۸° ۴۸′ ۳۷″ + ک مس (۸° ۴۸′ ۳۷″)،

۶۴° ۲۲′ ۴۷″ + ک مس (۶۴° ۲۲′ ۴۷″)

ہوں گے اِن کا مجموعہ عرض التمام (۳۶° ۳۶′ ۴۷″) کا دگنا ہونا چاہئیے اس لئے

۷۳° ۱۱′ ۲۴″ + ک (۲۱۰۸۵ + ۰٫۱۵۵) = ۷۳° ۱۳′ ۳۴″

اس لیے ک = ۵۸٫۰۱″

دوسرا طریقہ ـ انقلابوں پر سورج کے راسی فاصلوں کا مشاہدہ کرنے سے بھی انعطاف کے مستقل معلوم کئے جا سکتے ہیں ـ
فرض کرو کہ انقلابوں پر سورج کے ظاہری نصف النہاری راسی فاصلے ی، ی۲ ہیں ـ فرض کرو کہ ان کے جواب میں انعطاف غہ۱ اور غہ۲ ہیں ـ اِس لیے اصلی راسی فاصلے ی۱ + غہ۱ اور ی۲ + غہ۲ ہیں ـ یہ مان لو کہ سورج کے عرض بلد کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے یا دوسرے الفاظ میں سورج کا مرکز فی الواقعی طریق الشمس میں ہے جو ہمیشہ بڑی حد تک درست ہے تو اِن راسی فاصلوں کا اوسط وہ قوس ہے جو راس سے خط استوا تک کھینچی گئی ہے یعنے عرض بلد ـ اس لیے

۲ فہ = ی۱ + ی۲ + غہ۱ + غہ۲

اگر عرض بلد معلوم ہو اور اگر ہم یہ مان لیں کہ

غہ۱ = ک مس ی۱ اور غہ۲ = ک مس ی۲

تو ک کے لیے ایک مساوات حاصل ہوتی ہے ـ

(۱۳۳)

تیسرا طریقہ ۔ اس میں ایک ہی ستارہ س کے راسی فاصلے س ر$_1$ اور س ر$_2$ دو مختلف رصدگاہوں سے مشاہدہ کئے جاتے ہیں، فرض کرو کہ ان میں سے ایک رصدگاہ شمالی عرض بلد فہ$_1$ پر واقع ہے اور دوسری جنوبی عرض بلد فہ$_2$ پر (دیکھو شکل ۴۵)۔
اگر شمالی اور جنوبی قطب سماوی ق اور قَ ہوں تو

س ر$_1$ = س ق − ر$_1$ ق = فہ$_1$ − ضہ،

س ر$_2$ = س قَ − ر$_2$ قَ = فہ$_2$ + ضہ

اگر مشاہدہ کردہ راسی فاصلے ی$_1$ اور ی$_2$ ہوں اور اگر ہم انعطافوں کو ک مس ی$_1$ اور ک مس ی$_2$ مان لیں تو

س ر$_1$ = ی$_1$ + ک مس ی$_1$

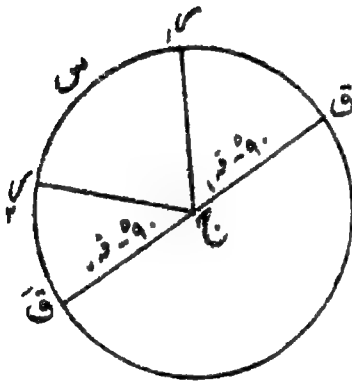
س ر$_2$ = ی$_2$ + ک مس ی$_2$

پس

ی$_1$ + ک مس ی$_1$ + ی$_2$ + ک مس ی$_2$

= فہ$_1$ + فہ$_2$

شکل (۴۵)

اس مساوات سے ک معلوم کیا جا سکتا ہے۔
ہم مثال کے طور پر ستارہ مراۃ المسلسلہ (ب) (β Andromedae) لیں گے۔ اس ستارہ کو گرینیچ پر جس کا عرض بلد ۵۱° ۲۸′ ۳۸″ ش ہے بوقت تکبد مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ اس کا جنوبی ظاہری راسی فاصلہ ۱۶° ۲۰′ ۳″ تھا۔ اس ستارہ کو راس امید کی رصدگاہ پر بھی جس کا عرض بلد

۳۳° ۵۶′ ۲″ ج ہے بوقت تکبد مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ اس کا شمالی ظاہری راسی فاصلہ ۶۹° ۱′ ۵۰″ تھا۔ اس لیے ہمیں حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

۱۶° ۲۰′ ۳″ + ک مس (۱۶° ۲۰′) + ۶۹° ۱′ ۵۰″ + ک مس (۶۹° ۲′)
= ۸۵° ۲۴′ ۴۲″

جس سے ک = ۲ء۸۱ ۵″

۴۷ ۔ انعطاف کا اثر ساعتی زاوئے اور میل پر ۔

کسی ستارے کے ساعتی زاوئے اور میل پر انعطاف کا اثر معلوم کرنیکے لیے دفعہ ۳۵ کے تفرقی ضابطے استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ انعطاف کا اثر یہ ہوتا ہے کہ ستارہ اپنی اصلی مقام سے راس کی طرف ذرا اوپر اٹھا ہوا دکھائی دیتا ہے۔ اگر مشاہدہ کردہ راسی فاصلہ ی ہو تو اصلی راسی فاصلہ ی + مف ی ہوگا جہاں مف ی = ک مس ی ۔ ہم مان لیتے ہیں کہ عرض بلد معلوم ہے، اس لیے مف فہ = ۰ اور چونکہ السمت انعطاف سے نہیں بدلتا اس لیے مف ا = ۰ ۔ (۱۳۲)

اب ستارہ کے میل پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے ہم وہ ضابطہ لکھ لیتے ہیں جو مف ا، مف فہ، مف ی، مف ضہ کے درمیان ہے (دیکھو دفعہ ۳۵ (۱)) یعنے

مف ضہ + جم عا مف ی ۔ جم س مف فہ ۔ جب س جم فہ مف ا = ۰

اس مساوات میں رکھو مف ا = ۰، مف فہ = ۰، مف ی = ک مس ی تو

مف ضہ = ۔ ک مس ی جم عا

یعنے اگر ضہ مشاہدہ کردہ میل ہو تو ضہ ۔ ک مس ی جم عا اصلی میل ہے ۔

ساعتی زاویہ پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۳۵ کا ضابطہ (۲)

مف ی + جم ا مف فہ + جم عا مف ضہ + جم فہ جب ا مف س = ۰ ۔

لکھ لو اور وہی اندراجات عمل میں لاؤ تو

مف س = ک جب عا مس ی قط ضہ

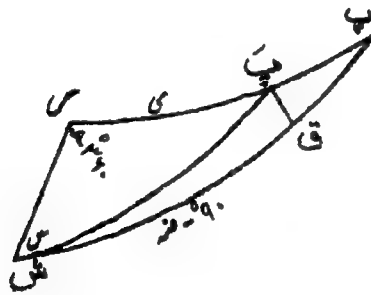
اختلاف منظری زاویہ پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے ہم دفعہ ۳۵ کا ضابطہ (۶)

مف عا ـ جم ی مف ا + جب ضہ مف س ـ جب ا جب ی مف قہ ـ

استعمال کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

مف عا = ـ ک جب عا مس ضہ مس ی

محصلہ بالا نتیجوں کو دوسری طرح حسب ذیل طریقہ پر ثابت کیا جا سکتا ہے ـ شکل (۴۶) میں ش قطب شمالی، س راس، پ ستارہ کا اصلی مقام پَ ستارہ کا ظاہری مقام بوجہ انعطاف، اور پ پَ = ک مس ر اپَ = ک مس ی ـ نیز پَ ق، پ ش پر عمود ہے اور اگر زاویہ پ ش پَ چھوٹا ہو جیسا کہ بالعموم ہوتا ہے بشرطیکہ پ قطب کے نزدیک نہ ہو تو قطبی فاصلہ میں تبدیلی حسب ذیل ہے

پ ق = پ پَ مس عا
= ک مس ی جم عا

شکل (۴۶)

مشاہدہ کردہ میل ۹۰ ـ ش ق ہے لیکن اصلی میل ۹۰ ـ ش پ ہے ـ اس لیے مشاہدہ کردہ میل پر مف ضہ کی تصحیح عمل میں لانی چاہیے

تاکہ اصلی میل حاصل ہو اور مف ضہ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے (۱۳۵)

مف ضہ = ـ ک مس ی جم عا

نیز

مف س = پ ش ق = ک مس ی جب عا قم پ ش

= ک مس ی جب عا قط ضہ

نیز چونکہ مف عا مف ضہ انعطاف سے نہیں بدلتا اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیئے

جم عا جم ضہ مف عا = جب عا جب ضہ مف ضہ

اس میں مف ضہ کی بجائے اِس کی قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

مف عا = ـ ک جب عا مس ضہ مس ی

۴۸ ـ انعطاف کا اثر دو قریبی سماوی نقطوں کے درمیان ظاہری فاصلہ پر ـ

ہم اول یہ بتائیں گے کہ اگر انعطاف کو ک مس ی لیا جائے تو دو قریبی ستاروں کے درمیان ظاہری فاصلہ ف میں جسے قوس کے ثانیوں میں لیا گیا ہو حسب ذیل تصحیح جمع کرنی ہوگی جو قوس کے ثانیوں میں ہے:

ک ف (۱ + جم۲ طہ مس۲ ی) جب ۱″

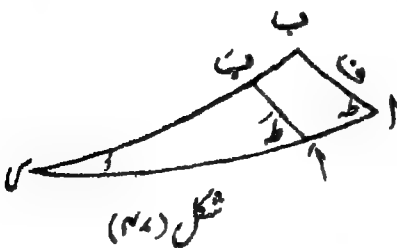
جہاں صدر تارے کا راسی فاصلہ ی ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جو ان دو ستاروں کو ملانے والی قوس اور اُس قوس کے درمیان ہے جو صدر تارے سے راس تک کھینچی گئی ہو ـ

فرض کرو کہ س راس ہے،

س ا = لا، س ب = ما،

ا ب = ف، زاویہ

ا س ب = ا اور زاویہ

س ا ب = طہ ـ انعطاف کا

شکل (۴۸)

اثر یہ ہوگا کہ قوس ا ب راس کی طرف اوپر کو اَ بَ تک ہٹی ہوئی ہوگی جہاں

ا اَ = ک مس لا

اور ب بَ = ک مس ما

اِس سے نیز

جم فَ = جم لا جم ما + جب لا جب ما جم ا

ا کو مستقل سمجھ کر تفرق کرنے اور

مف لا = ـ ک مس لا

مف ما = ـ ک مس ما

رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ـ جب ف × مف ف = ک جب لا جم ما مس لا + ک جم لا جب ما مس ما

ـ ک جم ا جم لا جب ما مس لا ـ ک جم ا جب لا جم ما مس ما

= ک جب^2 (لا ـ ما) قط لا قط ما + ۴ ک جب^2 $\frac{1}{2}$ ا جب لا جب ما

اب چونکہ یہ دونوں قیمیں چھوٹی ہیں جملوں قط لا قط ما اور جب لا جب ما میں لا = ما = ی (کسی ایک ستارہ کا راسی فاصلہ) رکھ سکتے ہیں ـ نیز چونکہ ا، ف چھوٹے ہیں ہم رکھ سکتے ہیں

جب ف = ف، جب^2 (لا ـ ما) = ف^2 جم^2 طہ

اور ۴ جب^2 $\frac{1}{2}$ ا = ا^2 = ف^2 جب^2 طہ قم^2 ی (۱۳۶)

اس لیے ف میں سے جو مقدار انعطاف کی وجہ سے تفریق کرنی ہوگی وہ یہ ہے

ک ف (۱ + جم^2 طہ مس^2 ی)

یا اگر ک، ف، مف ف قوس کے ثانیوں میں بیان کئے گئے ہوں تو

ک ف (۱ + جم^2 طہ مس^2 ی) جب ۱َ

سے ثانیوں کی وہ تعداد حاصل ہوگی جس قدر فاصلہ ف انعطاف کی وجہ سے گھٹ چکا ہے ـ اِس لیے یہ وہ تصحیح ہے جو دو قریبی ستاروں کے

درمیان بہ پیمائش شدہ فاصلہ پر عمل میں لانی ہو گی تا کہ انعطاف کے اثر کو رفع کیا جائے۔

اس کے بعد اب یہ ثابت کرتا ہے کہ زاویہ طہ جو ان دو ستاروں کو ملانے والے خط اور انتصابی کے درمیان ہے انعطاف کی باعث ک جب طہ جم طہ مس ۲ ی کی حد تک بڑھ جاتا ہے۔

مساوات

ف جب طہ = جب ا جب ما

کا لوگارتمی تفرقی لینے سے حاصل ہوتا ہے

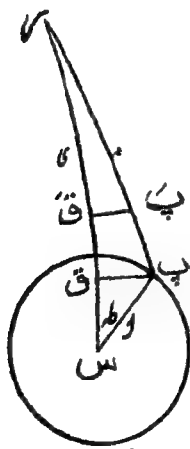
$$\frac{\text{مف ف}}{\text{ف}} + \text{مم طہ مف طہ} = \text{مم ما مف ما}$$

جو اندراج سے ہو جاتا ہے

- ک (۱ + جم^2 طہ مس ۲ ی) + مم طہ مف طہ = - ک

اس لیے مف طہ = ک جب طہ جم طہ مس ۲ ی

اور یہ وہ مقدار ہے جسے ظاہری زاویہ ب ا ر میں سے تفریق کرنا ہو گا تا کہ اصلی زاویہ ب ا ر حاصل ہو۔

چاند یا سورج کی دائری قرص کی شکل میں انعطاف کی باعث جو بگاڑ واقع ہوتا ہے اُسے حسب طریقہ ذیل معلوم کیا جا سکتا ہے:۔ فرض کرو کہ سورج کا مرکز س (شکل ۴۸) ہے، اس کا نصف قطر ا، اس کے گھیرے پر کوئی نقطہ پ، اور راس ر ہے۔ فرض کرو کہ ر س = ی۔ فرض کرو کہ انعطاف کا سرک ہے جس کی وجہ سے

شکل (۴۸)

پ میں پَ تک ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اور فرض کرو کہ پ ق اور
پَ قَ ، س ر پر عمود ہیں۔ دفعہ گذشتہ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ
پ ق انعطاف کی باعث پَ قَ تک ہٹ جاتا ہے۔ اگر ہم
س کو مبدا قرار دیں اور س ر کو لا کا محور اور اس طرح پَ کے محدد
لا اور ما ہوں تو

ما = پَ قَ = (۱ - ک) پ ق = ا (۱ - ک) جب ط

نیز لا = س قَ = ا جم ط + ق قَ

= ا جم ط + ک مس (ی - ا جم ط)

= ا جم ط + ک (مس ی - ا جم ط قط^{2} ی)

اِس لیے ط کو ساقط کرنے سے سورج کی منعطف شکل کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{(\text{لا} - \text{ک مس ی})^{2}}{(\text{ا} - \text{ا ک قط}^{2}\text{ ی})^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ا}^{2}(\text{۱} - \text{ک})^{2}} = \text{۱}$$

(۱۳۷) اِس کا محور اعظم ا (۱ - ک) ہے اور محور اصغر ا (۱ - ک قط^{2} ی)۔ اِن محوروں میں نسبت ۱ - ک مس^{2} ی ہے۔ بلا شبہ یہاں ک نیم قطری زاویوں میں ہے۔

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی چھوٹی افقی قوس انعطاف کی وجہ سے نسبت ۱ - ک : ۱ میں گھٹ جاتی ہے اور کوئی چھوٹی انتصابی قوس جو ایک معتدبہ راسی فاصلہ پر ہو نسبت ۱ - ک قط^{2} ی : ۱ میں گھٹ جاتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر دو قریبی ستاروں کے درمیان میل کا فرق ف ہو اور اگر ان میں سے ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی اور اختلاف منظری زاویہ عا ہو تو انعطاف کا اثر یہ ہوگا کہ میل کا فرق بقدر

ک ف (۱ + مس^{2} ی جم^{2} عا) جب ۱ً

سے گھٹ جائیگا۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ انعطاف راسی فاصلہ کے مماس کے

متناسب ہے اور انعطاف کا مُحرک ہے۔

پس اِن دو ستاروں کو ملانے والی قوس کا ظل اِن میں سے ایک ستارہ میں سے گذرنے والے ساعتی دائرہ پر ف ہے اور یہ ساعتی دائرہ راسی فاصلہ کے ساتھ زاویہ عا بناتا ہے۔

مثال ۲ — عرض بلد ۵۳° ۲۳َ ۱۳ً ش میں موقوعہ ایک رصدگاہ کی دوربین کو ۳۸° ۹َ شمالی میل کے توازی پر کے ایک نقطہ کی طرف لگایا گیا ہے اور ۶ گھنٹوں کے ساعتی زاویہ پر ثابت کیا گیا ہے۔ دو ستارے یکے بعد دیگرے میدانِ نظر میں سے گذرتے ہیں اور اِن کے مَیل کا ظاہری فرق ۶۸ ، ۰۲ً ہے۔ ثابت کرو کہ انعطاف کا اثر دفع کرنیکے لیے اِس فرق کو بقدر ۰،۰۹ً کے بڑھانا ہوگا۔

(اِن میں سے ایک ستارہ دجاجہ ۶۱ (61 cygni) ہے اور دوسرا ستارہ مقابلہ کرنے کے ان ستاروں میں سے ایک ہے جو رصدگاہ ڈنسنک (Dunsink) میں دجاجہ ۶۱ کا اختلاف منظر میل کے فرقوں کے طریقہ سے معلوم کرنے میں استعمال کئے گئے تھے۔)

مثال ۳ — متعدد ستارے اپنے غیر منعطف مقاموں میں ایک چھوٹے منحنی پر واقع ہیں جس کی قطبی مساوات غہ = ف (طہ) ہے جہاں غہ ایک بڑے دائرہ پر وہ فاصلہ ہے جو ایک نقطہ و سے جس کو مبداء قرار دیا گیا ہے منحنی پر کے ایک نقطہ پ تک ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جو و پ اور و س کے درمیان ہے جہاں س مُشاہد کا راس ہے۔ ثابت کرو کہ انعطاف کا اثر ملحوظ رکھ کر منحنی کی قطبی مساوات حسب ذیل مساواتوں سے غہ اور طہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی:—

غہ = ف (طہ)

غہَ = غہ ـ ک غہ (۱ + مس۲ ی جم۲ طہ)

طہَ = طہ + ک جب طہ جم طہ مس۲ ی

جہاں غہَ وہ سمتی نیم قطر ہے جو نقطوں وَ اور پَ کو ملاتا ہے جو علی الترتیب

و اور پ کے منعطف محل ہیں، اور طہ وہ زاویہ ہے جو وَپَ، وَر
کے ساتھ بناتا ہے۔

مثال ۴ ۔ سورج کا زاوئی قطر معلوم کرنا مقصود ہے۔ دو پیمائش کردہ قطروں کا حسابی اوسط جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ف ہے۔ انعطاف کا سر ک ہے جو نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے اور سورج کے مرکز کا راسی فاصلہ ی ہے۔ ثابت کرو کہ اصلی قطر ف (۱ + ک + ۱/۲ ک مس^۲ ی) ہے خواہ وہ زوایائے محل کچھ ہی ہوں جن میں یہ دو قطر جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ناپے گئے تھے۔ (یہ سوال ایک نتیجہ پر مبنی ہے جو مشاہدات گرینوچ "Gr. Observations" کے مقدمہ میں درج ہے)

قطع ناقص کے مرکز سے نقطہ طہ کا فاصلہ ا (۱ ـ ک ـ ک جم^۲ طہ مس^۲ ی) ہے۔ اس لیے طہ اور طہ + ۹۰° پر یعنے ایک دوسرے پر علی القوائم نیم قطروں کا حسابی اوسط ا (۱ ـ ک ـ ۱/۲ ک مس^۲ ی) = ۱/۲ ف ہے اور

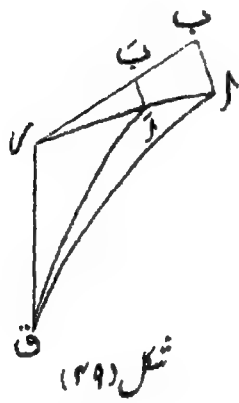
اِس لیے ۲ ا = ف (۱ + ک + ۱/۲ ک مس^۲ ی)

۴۹ ـ انعطاف کا اثر ایک دوہرے تارے کے زاویۂ محل کی پیمائش پر۔

فرض کرو کہ اس زوج کا صدر تارہ اور ثانوی تارہ علی الترتیب ا، ب ہیں جن سے یہ دوہرا تارہ بنتا ہے اور فرض کرو کہ ق شمالی قطب ہے۔

کرۂ سماوی پر ایک دائرہ کا تصور کرو جس کا مرکز ا ہے اور جس کی درجہ بندی ایسی ہوئی ہے کہ مشاہد شطب ہے اور اق (< ۱۸۰°) اس دائرہ کو صفر درجہ پر قطع کرتا ہے۔ وہ نقطہ جس میں اب اس درجہ دار دائرہ سے ملتا ہے ستارہ ا کے لحاظ سے ب کا زاویہ محل کہلاتا ہے۔ زاویہ محل کی پیمائش کے طریقہ کی مزید توضیح حسب ذیل کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ دوہرا تارہ نصف النہار پر یا اس کے قریب ہے اور وہ اپنے بالائی تکبد پر ہے اور ثانوی تارہ صدر تارہ کے مشرقی جانب ہے۔ تب زاویہ محل تقریباً ۹۰° ہے۔ لیکن اگر ثانوی تارہ مغربی جانب ہوتا جبکہ صدر تارہ نصف النہار پر ہو تو اس کا زاویہ محل

۲۷۰° ہوتا کیونکہ ہر صورت میں پیمائش کی سمت اُس قوس سے جو قطب تک کھینچی گئی ہو وہی ہے۔ ہیئت داں اسے بالعموم سمت ش۔پ۔ج۔ (N.P.S.P.)[1] کے نام سے جانتے ہیں کیونکہ یہ پیمائش شمالی نقطہ سے شروع ہو کر آسمان کے اُس حصہ کی جانب سے گزرتی ہے جو یومی حرکت کے لحاظ سے پیچھے ہے اور پھر جنوب کے گرد ہوتے ہوئے شمال کی طرف آسمان کے اس حصہ میں سے واپس ہوتی ہے جو آگے ہے۔

اگر ق قطب، ر راس، اور دوسرے تارہ ا ب کا صدر تارہ ا ہو (شکل (۴۹) تو زاویہ محل حسب تعریف مندرجۂ بالا زاویہ ق ا ب ہے۔ انعطاف زاویہ محل کو زاویہ ق اَ بَ میں بدلدیتا ہے۔ اِس طرح انعطاف زاویہ محل کو دو طریقوں سے بدلتا ہے اولاً اختلاف منظری) زاویہ ق ا ر (= عا) کو تبدیل کرتا ہے اور ثانیاً زاویہ ب ا ر کو۔ یہ دونوں زاویے انعطاف کی باعث بدل جاتے ہیں اور مشاہدہ کردہ زاویہ محل پر جو تصحیح عمل میں لائی ہوگی وہ اُس صورت میں جو شکل (۴۹) میں ظاہر کی گئی ہے منفی ہونی چاہیئے۔ ہم اصلی زاویہ محل کو م سے تعبیر کریں گے۔

شکل (۴۹)

پس زاویہ ب ا ر = م - عا، اور اس لیے (دفعہ ۴۸)

زاویہ بَ اَ ر = م - عا + ک جب (م - عا) جم (م - عا) مس² ی،

زاویہ ق اَ ر = عا + ک مس ی مس ضہ جب عا

پس اگر انعطاف کی باعث زاویہ محل م‌ع ہو تو

م‌ع = م + ک مس ی مس ضہ جب عا + ک جب (م - عا) جم (م - عا) مس² ی (۱۳۹)

[1] یعنی شمال، پیچھے، جنوب، آگے۔

اگر اسی ابتدائی ستارے (صدر تارے) کے حوالے سے کسی دوسرے ستارے کے لیے متناظر ارقام مَع اور مَ ہوں تو

مَع = مَ + ک مس ی مس ضہ جب عا + ک جب (مَ - عا) جم (مَ - عا) مس۲ ی

تفریق کرنے سے یہ آسانی حاصل ہوتا ہے

مَ - م = مَع - مع - ک مس۲ ی جب (مَ - م) جم (۲ عا - م - مَ)

ستارہ ا' یومی حرکت کی باعث جس سمت میں حرکت کرتا ہے اُس کا اصلی زاویہ محل م' ۲۷۰° ہے اس لیے اگر یومی حرکت کی باعث ا کی حرکت کے لیے مشاہدہ کردہ زاویہ محل مَع ہو تو

م = مع + ۲۷۰° - مَع + ک مس۲ ی جم م جب (۲ عا - م)

خلاصہ - گذشتہ دفعہ اور اس دفعہ سے کسی دوہرے تارے کے مشاہدہ کردہ فاصلہ اور زاویہ محل کی اُس تصحیح کے لیے جو انعطاف کی باعث عمل میں لانی ہوگی حسب ذیل نتیجہ برآمد ہوتا ہے[1]۔

فرض کرو کہ دو ستاروں کا فاصلہ جس کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو' ف ہے' ی راسی فاصلہ' م زاویہ محل' عا اختلاف منظری زاویہ' اور ک انعطاف کا سر قوس کے ثانیوں میں ہے تو اصلی فاصلہ حاصل کرنے کے لیے جو تصحیح ظاہری فاصلہ میں جمع کرنی ہوگی وہ

ک ف {۱ + مس۲ ی جم۲ (م - عا)} جب ۱"

---

[1] ان تصحیحات کے اطلاق میں آسانی پیدا کرنے کے لیے جدولیں تیار کی گئی ہیں' ان کے لیے دیکھو

Monthly Notices of the Royal Astro. Soc. vol. xli. p. 445

ہے۔ اور اصلی زاویہ محل حاصل کرنے کے لیے جو تصحیح پیمائش کردہ زاویہ محل میں جمع کرنی ہوگی وہ

ک مس^۲ ی جم م جب (۲ عا ـ م)

ہے۔

مثال: ـ ستارہ سلیاق (عہ) (a Lyræ) کا میل ۳۸° ۴۰َ ہے اور متصلہ ستارے کا زاویہ محل ۱۵۰° ۰ ۱۰َ ۵۸ً ہے۔ وہ تصحیح معلوم کرو جو انعطاف کی باعث اِس زاویہ محل پر عائد کرنی ہوگی جبکہ ساعتی زاویہ ۷ گھنٹے مغرب ہو، عرض بلد ۵۳° ۲۳َ ۱۳ً ہو اور انعطاف کا سر ۲ ۵۸ً ہو۔

اولاً راسی فاصلہ ۶۷° ۳۶َ اور اختلاف منظری زاویہ ۳۸° ۴۲َ کا محسوب کر لینا ضروری ہے۔ پھر ضابطہ سے تصحیح ۱ ۶ ۴۴َ حاصل ہوتی ہے جو مشاہدہ کردہ زاویہ محل میں جمع کرنی ہوگی تاکہ اُسے انعطاف کے اثر سے پاک کرے

(۱۴۰)

انعطاف پر متفرق سوالات

مثال ۱ ـ ثابت کرو کہ انعطاف کسی جرم کے راسی فاصلہ کی جیب کو نسبت (۱ـک) : ۱ میں گھٹاتا ہے جہاں ک انعطاف کا سر ہے۔

مثال ۲ ـ ستارہ عقاب (عہ) (a Aquilæ) کا شمالی میل ۸° ۳۲َ ۳۹ً ہے۔ ثابت کرو کہ گرینوچ (عرض بلد ۵۱° ۲۸َ ۳۸ً ش) پر بوقت تکبد اس کا ظاہری راسی فاصلہ ۴۲° ۵۰َ ۱۰.۵ً ہے اور راس امید (عرض بلد ۳۳° ۵۶َ ۴ً ج) پر ۴۲° ۳۲َ ۵.۰ً ہے۔

مثال ۳ ـ اگر افقی انعطاف ۳۵َ ہو تو ثابت کرو کہ سورج کے طلوع یا غروب پر جبکہ اِس کا میل ضہ ہو سورج کے مرکز کے ساعتی زاویے س کے لیے ضابطہ حسب ذیل ہے

$$\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{س} = \text{قط فہ قط ضہ جم} (45^\circ + 5' 17' - \tfrac{1}{2}\text{فہ} - \tfrac{1}{2}\text{ضہ}) \times$$

$$\text{جب} (45^\circ - 15' 1' - \tfrac{1}{2}\text{فہ} - \tfrac{1}{2}\text{ضہ})$$

مثال ۴ — اگر یہ مان لیا جائے کہ چاند بوقت طلوع اختلاف منظر کی باعث ۵۹َ نیچے دب جاتا ہے اور انعطاف کی باعث ۳۵َ مرتفع ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ اگر ساعتی زاویہ س ہو اور میل ضہ تو گرینوچ پر

جم ½ س = [۲۰٫۵۶] قا ط ضہ جم (۱۹° ۲۷َ ۳۱ − ½ ضہ) جب (۱۹° ۲۷َ ۲۷ − ½ ضہ)

مثال ۵ — گرینوچ (عرض بلد ۵۱° ۲۸َ ۳۸ً) میں بتاریخ ۸ فروری ۱۸۹۴ء سورج کا میل بوقت طلوع ۱۴° ۳۹َ ج تھا۔ جس کا ظاہری ساعتی زاویہ معلوم کرو یہ مان لیا جائے کہ افقی انعطاف ۳۵َ ہے۔

مثال ۶ — ایک ستارے کے ظاہری راستہ کا ظل افق کے مستوی پر ایک قطع ناقص ہے جس کا خروج المرکز جم فہ ہے جہاں فہ عرض بلد ہے۔ یہ ستارہ قطب سے دور نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس ستارہ کا راسی فاصلہ بہت بڑا نہ ہو تو وہی صورت انعطاف کی باعث بدلے ہوئے ظاہری راستے کے لیے ہو گی۔
[Coll. Exam.]

مثال ۷ — ستارہ دجاجہ (عہ) (a Cygni) کا شمالی میل ۴۴° ۵۰َ ۱۰ً ہے (سنہ ۱۹۰۹ء)۔ ثابت کرو کہ عرض بلد ۵۴° ۲۳َ ۱۳ً پر بالائی و زیرین تکبدوں کے وقت اس کے ظاہری راسی فاصلے علی الترتیب ۹° ۲۵َ ۴۹ً اور ۸۱° ۳۴َ ۱۸ً ہیں یہ مان لیا گیا ہے کہ انعطاف

۵۸٫۲۹۴ً مس ی − ۰٫۰۶۶۸۲ً مس³ ی

لیا جا سکتا ہے جہاں ی = ظاہری راسی فاصلہ۔

مثال ۸ — ثابت کرو کہ اگر کسی خاص آن پر ایک ستارہ کا میل انعطاف سے غیر متاثر ہو تو یہ ستارہ قطب اور راس کے درمیان تکبد کرتا ہے اور اس کا سمت زیر بحث آن پر اعظم ہے۔ [Math. Trip 1]
ستارہ قطب کے گرد جو چھوٹا دائرہ مرتسم کرتا ہے اُس کو مس کرتا ہوا ایک بڑا دائرہ راس سے کھینچا جائے تو اس سے وہ نقطہ حاصل ہوتا ہے جہاں ستارہ کا

راسی فاصلہ اس کے قطبی فاصلہ پر علی القوائم ہوگا - یہ ظاہر ہے کہ ستارہ جس وقت نقطہ تماس پر واقع ہو تو اس کا السمت بڑے سے بڑا ہوگا اور اس سے بڑا السمت اُسے کبھی حاصل نہیں ہو سکتا -

مثال ۹ - ثابت کرو کہ راسی فاصلہ کے اُن حدود کے اندر جنہیں (۱۴۱) انعطاف کو ک مس ی (یعنے ک × راسی فاصلہ کا مماس) لیا جا سکتا ہے کسی ستارہ کا ظاہری مقام ایک کوکبی یوم میں ایک مخروطی تراش مرتسم کرتا ہے جو قطع ناقص یا قطع زائد ہوگی بموجب اس کے کہ جب² فہ ≶ جم² ضہ جہاں ضہ ستارہ کا میل ہے اور فہ مقام کا عرض بلد -

اُس بڑے دائرہ کو جو ستارہ کے اصلی مقام سے قطب تک کھینچا گیا ہو لا کا محور لینے سے منعطف مقام کے مستوی محدد

لا = ک مس ی جم عا ، ما = ک مس ی جب عا

حاصل ہوتے ہیں جہاں ی اور عا علی الترتیب راسی فاصلہ اور اختلاف منظری زاویہ ہیں - کروی مثلث سے

جب ی جب عا = جم فہ جب ت ، جب ی جم عا = جم ضہ جب فہ - جب ضہ جم فہ جم ت

جم ی = جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم ت ،

لا = (ک جم ضہ جب فہ - ک جب ضہ جم فہ جم ت) / (جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم ت) ، ما = (ک جم فہ جب ت) / (جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم ت)

اِن سے حاصل ہوتا ہے

جب ت = مس فہ (ما) / (لا جم ضہ + ک جب ضہ) ،

جم ت = مس فہ (ک جم ضہ - لا جب ضہ) / (لا جم ضہ + ک جب ضہ)

اس لیے ت کو ساقط کرنے سے

ما² + (ک جم ضہ - لا جب ضہ)² = مم² فہ (لا جم ضہ + ک جب ضہ)²

جیسے لکھا جا سکتا ہے

لا۲ (جب۲ فہ - جم۲ ضہ) + ما۲ جب۲ فہ - لا ک جب ۲ فہ + ک۲ (جب۲ فہ - جب۲ ضہ) = ۰
اور یہ ایک قطع ناقص ہے یا قطع زائد بموجب اس کے کہ جب۲ فہ - جم۲ ضہ مثبت ہو یا منفی ۔

مثال ۱۰ ۔ یہ تسلیم کر کے کہ انعطاف ایک چھوٹی مقدار ہے اور راسی فاصلہ کے متناسب ہے ثابت کرو کہ اگر ایک ہی ستارہ کو مختلف مقامات سے جو ایک ہی نصف النہار پر واقع ہیں ایک ساتھ مثلاً رصد کیا جائے تو اس کے ظاہری مقامات ایک بڑے دائرہ کی قوس پر واقع ہوتے ہیں ۔

[Coll. Exam.]

یہ سوال حسب ذیل ہندسی مسئلہ سے جو آسانی سے ربعی مثلثوں کے قاعدوں سے ثابت ہوتا ہے (دیکھو صفحہ ۸) فوراً حل ہو جاتا ہے ۔ اگر او ایک ربع ہو اور و میں سے گذرنے والا ایک متغیر بڑا دائرہ دو ثابت بڑے دائروں کو جو ا میں سے گذرتے ہیں علی الترتیب پ اور ق میں قطع کرے تو س و پ / س و ق مستقل ہے ۔

مثال ۱۱ ۔ اگر ایک ستارہ کا میل ضہ ہو تو ثابت کرو کہ اگر افقی انعطاف ع ہو تو ستارہ کے طلوع کا وقت ایک مقام پر جس کا عرض بلد فہ ہے تقریباً

$$\frac{ع}{۱۵\sqrt{جم^۲ ضہ - جب^۲ فہ}} \text{ ثانیوں}$$

سے تبدیل ہوتا ہے ۔

حسب معمول ترقیم سے

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم ت

تفرق کرنے سے (۱۴۲)

مف ی = جم فہ جم ضہ جب ت مف ت

لیکن ستارہ چونکہ افق پر ہے اس لیے جب ی = ۱ اور

∴ جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم ت ،

جم فہ جم ضہ جیب ت = (جم^2 فہ جم^2 ضہ ـ جم^2 فہ جم^2 ضہ جم^2 ت)$^{\frac{1}{2}}$

= (جم^2 فہ جم^2 ضہ ـ جب^2 فہ جب^2 ضہ)$^{\frac{1}{2}}$

= (جم^2 ضہ ـ جب^2 فہ)$^{\frac{1}{2}}$

اس لیے مف ی = (جم^2 ضہ ـ جب^2 فہ)$^{\frac{1}{2}}$ مف ت

اگر مف ی قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو اور مف ت وقت کے ن ثانیے ہوں تو ہم رکھتے ہیں مف ی = عً اور مف ت = ۱۵ نً جن سے ن کے لیے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۲ — یہ تسلیم کرکے کہ ایک ستارہ کے راسی فاصلہ ی میں انعطاف کی باعث تغیر ک مس ی ہے جہاں ک چھوٹا ہے ثابت کرو کہ عرض بلد فہ میں ایک حائظ قطبی ستارہ کے ساعتی زاویہ میں پیدا شدہ تبدیلی بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ زاویہ ق س ش ایک قائمہ زاویہ ہو جہاں ق قطب، س ستارہ، اور ش افق کا شمالی نقطہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس تبدیلی کی اعظم قیمت

ک مس فہ قط ضہ $\sqrt{\text{قط ی}_1 \text{ قط ی}_2}$

ہے جہاں ی$_1$ اور ی$_2$ ستارے کے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے راسی فاصلے ہیں۔

ساعتی زاویے س میں انعطاف کی باعث تبدیلی ک قط ضہ جم فہ × جب س قط ی ہے اور اگر جب س قط ی اعظم ہو تو نقطہ سَ شَ سے ۹۰° ہے جہاں سَ، س ق کو ق سے اتنا خارج کرکے حاصل کیا گیا ہے کہ س سَ = ۹۰°۔

مثال ۱۳ — یہ تسلیم کرکے کہ کسی جرم س کا انعطاف ہ ک مس ر س ثابت کرو کہ ص ـ ہ اور ش ـ ق ـ ف میں انعطاف کے اجزائے

تحلیلی جن کو علی الترتیب وقت کے ثانیوں اور قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو تقریباً

ک / ۱۵ × مس ر ل / جب ف جم (ف - ق ل) اور ک مس (ف ق ل)

ہیں جہاں ف جرم کا شمالی قطبی فاصلہ ہے، ق قطب، اور ر ل ایک بڑے دائرہ کی قوس ہے جو ر سے ق س پر عمود کھینچی گئی ہے۔

مثال ۱۴ — فرض کرو کہ مشاہد کا عرض بلد فہ، ایک ستارہ کا میل ضہ، اس کا مغربی ساعتی زاویہ س، اور انعطاف کا سر ۵۸ء۴ہ″ ہے۔ ثابت کرو کہ انعطاف کی وجہ سے ساعتی زاویہ کی تبدیلی کی ظاہری شرح میں

۲۴ء۵ ث جب م جم م (مس ضہ + مم فہ قط س) قم² (ضہ + م) فی یوم

کی کمی ہوتی ہے جہاں مس م = مم فہ جم س۔

نیز ثابت کرو کہ میل میں انعطاف کی شرح تبدیلی

+ ۱۵ء۳ ″ مم فہ جب س قم² (ضہ + م) جم² م فی گھنٹہ

ہے۔

(۱۴۳) انعطاف ستارہ کو راس کی طرف اس کے اصلی مقام س سے ظاہری مقام سَ تک اٹھاتا ہے۔ فرض کرو کہ اصلی ساعتی زاویہ س ہے اور ظاہری ساعتی زاویہ سَ ہے۔ قوس ر ل = ۹۰° - ن کو ق س پر عمود کھینچو (شکل ۵۰)

(س - سَ) جم ضہ = ک مس ی جب ر س ل

= ک جم ن قط ی

= ک جم فہ جب س / (جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س)

ت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

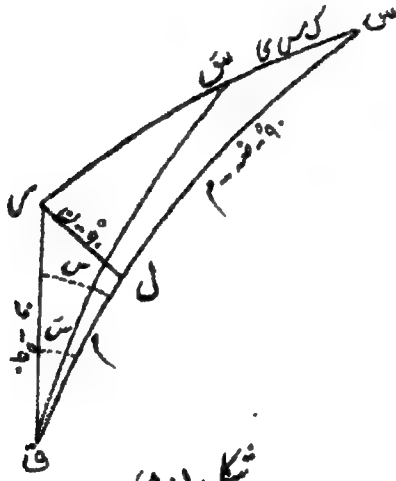
(فرس / فرت - فرسَ / فرت) جم ضہ

$$= \text{ک جم فہ}\ \frac{\text{جم س (جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س) + جم فہ جم ضہ جب}^{2}\text{ س}}{\text{(جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س)}^{2}}\ \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

$$= \text{ک جم فہ}\ \frac{\text{جم فہ جم ضہ + جب فہ جب ضہ جم س}}{\text{جم}^{2}\text{ ی}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

$$= \text{ک جم فہ}\ \frac{\text{جب فہ جم ضہ جم س (مس ضہ + مم فہ قط س)}}{\text{جب}^{2}\text{ (ضہ + م) جب}^{2}\text{ ن}}\ \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

$$= \text{ک}\ \frac{\text{جب فہ جم فہ جم ضہ جم س جم}^{2}\text{ م (مس ضہ + مم فہ قط س)}}{\text{جب}^{2}\text{ (ضہ + م) جب}^{2}\text{ فہ}}\ \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

$$= \text{ک جم ضہ جب م جم م}\ \frac{\text{مس ضہ + مم فہ قط س}}{\text{جب}^{2}\text{ (ضہ + م)}}\ \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

شکل (۵۰)

(۱۴۴) ایک کوکبی یوم میں ثانیوں کی تعداد ۸۶۴۰۰ ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ۸۶۴۰۰ + ع ثانیوں کی وہ تعداد ہے جو ایک مکمل گردش کے لیے مطلوب ہے اگر ستارہ کا ظاہری ساعتی زاویہ پورے دن اسی شرح سے بڑھنا جاری رکھے جو زیر بحث لمحہ پر تھی۔ پس

فر س / فر ت = ۲π / ۸۶۴۰۰ ، فر سَ / فر ت = ۲π / (۸۶۴۰۰ + ع)

اور اس لیے

(۲π / ۸۶۴۰۰ − ۲π / (۸۶۴۰۰ + ع)) = ک جب م جم م (مس ضہ + مم فہ قط س) / جب² (ضہ + م) · ۲π / ۸۶۴۰۰

چونکہ ع بہت چھوٹا ہے اس لیے ک = ۵۸٫۲۴ \ ۲۰۶۲۶۵ رکھنے سے

ع = ۲۴٫۵ ثا جب م جم م (مس ضہ + مم فہ قط س) قم² (ضہ + م)

جس میں مس م = مم فہ جم س

کسی استوائی ستارہ کے لیے

ضہ = ۰ اور ع = ۲۴٫۵ ثا مم م مم فہ قط س

= ۲۴٫۵ ثا قط² س

اس طرح کوئی استوائی ستارہ خواہ وہ نصف النہار کے کسی جانب اسکے قریب ہی کیوں نہ ہو انعطاف سے اس طور پر متاثر ہوتا ہے کہ وہ ایک ایسی لوکبی گھڑی کے ساتھ وقت میں برابر رہتا ہے جو فی یوم ۲۴٫۵ ثا کی شرح سے سست رہے۔

اگر میل میں انعطاف لا ہو جسے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو تو

لا = ک مس ی جم ر/س ل

= ک مس (۹۰° − ضہ − م) = ک مم (ضہ + م)

اس لیے تفرق کرنے اور مف لا، مف م، اور مف س سب کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا ہوا سمجھنے سے

مف لا = − ک قم² (ضہ + م) مف م جب ۱ً

لیکن مس م = مم فہ جم س

قط² م مف م = − مم فہ جب س مف س

اس لیے قط² م مف لا = ک قم² (ضہ + م) مم فہ جب س مف س جب ۱ً

اگر ش ' قوس کے ثانیوں میں بیان کردہ وہ شرح فی ساعت ہو
جس سے ٘یل بدل رہا ہے تو مف لا \ مف س = ش \ ۱۵ × ۶۰ × ۶۰ -
اِن اندراجات کو عمل میں لانے سے اور ک اور جب اَ کی قیمتیں داخل کرنے
سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے یعنی

ش = ۳ ؛ ۵ اً م فہ جب س قم۲ (ضہ + م) جم۱ م

یہ نتیجے سماوی عکاسی (فوٹوگرافی) کے فن میں عملی اہمیت رکھتے ہیں۔

ساتواں باب

کپلر اور نیوٹن کے کلیئے اور اُنکا استعمال

۵۰ ـ کپلر اور نیوٹن کے کلیئے ـ

وہ کلیئے جن کی بموجب سیارے سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں اور جو اِن کے موجد کپلر کے نام سے موسوم ہیں حسب ذیل ہیں:-

شکل (۵۱)

(۱) ہر سیّارہ کا مدار سورج کے گرد ایک قطع ناقص ہے جسکے

ایک ماسکہ پر سورج کا مرکز واقع ہے۔

فرض کرو کہ س (شکل ۵۱) سورج کا مرکز ہے تو کسی سیارہ کا مدار ا ب پ ق ایک قطع ناقص ہے جس کا ایک ماسکہ س ہے سیارہ کی رفتار مستقل نہیں ہوتی اور وہ کلیہ جس کی بموجب اس کی چال بدلتی ہے کیپلر کے دوسرے کلیہ سے ملتا ہے۔

(۲) وہ سمتی نیم قطر جو سورج کے مرکز سے سیارہ تک کھینچا جائے مساوی وقتوں میں مساوی رقبے عبور کرتا ہے۔

مثلاً قطع ناقص پر کوئی دو نقطے ا، ب لو اور نیز دیگر دو نقطے پ، ق تو اگر رقبہ ا س ب = رقبہ پ س ق تو سیارہ جتنے وقت میں ا ب کو مرتسم کرے گا اتنے ہی وقت میں پ ق کو مرتسم کرے گا۔ اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ شکل بالا میں تعبیر شدہ نقطوں کے لحاظ سے سیارہ کی رفتار، پ ق مرتسم کرتے وقت اُس رفتار سے بڑی ہوتی ہے جو اُس کی ا ب مرتسم کرتے وقت ہے۔

کیپلر کے پہلے دو کلیوں میں صرف ایک واحد سیارہ کی حرکت سے تعلق ہوتا ہے۔ کیپلر کے تیسرے کلیہ سے دو مختلف سیاروں کی حرکتوں کے درمیان ایک مشہور رشتہ حاصل ہوتا ہے۔ کسی سیارے کے اوسط فاصلہ کی تعریف ہم یہ کریں گے کہ وہ، سیارہ کے مدار کا نیم محور اعظم ہے اور اس کی مدت دوران یا دوری مدت کی تعریف اُس وقفہ سے کیجائیگی جس میں سیارہ اپنے مدار کے پورے محیط کو طے کر لیتا ہے۔ اب کیپلر کا تیسرا کلیہ اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے:-

(۳) دو سیاروں کی دوری مدتوں کے مربع وہی نسبت رکھتے ہیں جو سورج سے انکے اوسط فاصلوں کے مکعبوں کے درمیان ہوتی ہے۔

مثال — زمین اور زہرہ کی دوری مدتیں علی الترتیب ۳۶۵٫۲۶ دن اور ۲۲۴٫۷ دن ہیں اور ان دوری مدتوں کے مربعوں میں نسبت

$$(۳۶۵٫۲۶)^۲ \backslash (۲۲۴٫۷)^۲ = ۲٫۶۴۳$$

ہے سورج سے ان کے اوسط فاصلے ۱ اور ۰٫۷۲۳ ہیں پس چونکہ $۱ \backslash (۰٫۷۲۳)^۳ = ۲٫۶۴۳$ اس لیے ان دو سیاروں کے لیے کیپلر کے تیسرے قانون کی تصدیق ہو گئی۔

کیپلر کے یہ تین کلئے جو اوپر بیان ہوئے ہیں بالکل سیاروں کی حرکتوں کے مشاہدات سے کیپلر نے اخذ کئے تھے اور ان کے اخذ کرنے میں اُن قوتوں کا کہیں ذکر نہیں ہے جن کے تحت یہ حرکتیں جاری ہیں پون صدی سے زیادہ عرصہ تک یہ کلئے بغیر شرح کے محض واقعات کے طور پر قائم رہے۔ اسکے بعد نیوٹن نے ثابت کیا کہ یہ کلئے اُس عالمگیر قانون تجاذب کے لازمی نتیجے ہیں جو کائنات کے ہر مادی ذرہ کی حرکت پر جاری نظر آتا ہے۔

حرکت کے وہ تین کلئے جس پر علم حرکت کی عمارت تعمیر ہوئی ہے اور جو بالعموم نیوٹن کے کلیوں کے طور پر معروف ہیں حسب طریقۂ ذیل بیان کئے جا سکتے ہیں :-

کلیہ ۱ — ہر جسم اپنی سکون کی حالت میں یا ایک خط مستقیم میں اپنی یکساں حرکت کی حالت میں رہتا ہے تاآنکہ وہ عاملہ قوتوں سے اپنی حالت بدلنے پر مجبور ہو جائے۔

کلیہ ۲ — حرکت کی تبدیلی قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اُس خط مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں یہ قوت عمل کرتی ہے۔

کلیہ ۳ — ہر عمل کے جواب میں اس کے مساوی اور مخالف

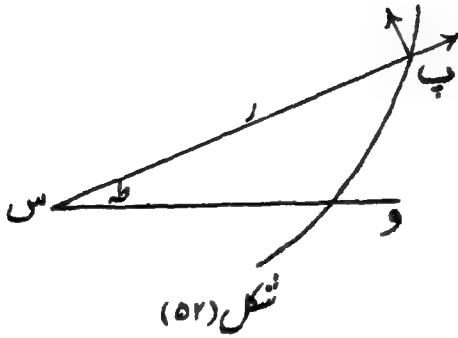
ایک تعامل ہوتا ہے' یا کسی دو جسموں کے باہمی عمل مساوی اور مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں ۔

حرکت کی تبدیلی سے نیوٹن کی مُراد معیار حرکت کی شرح تبدیلی ہے یعنے متحرک جسم کی کمیت اور اس کی رفتار کی شرح تبدیلی کا حاصل ضرب (۱۴۷) جیسے دوسرے لفظوں میں کمیت اور اسراع کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے ۔ کلیہ ۲ کی بناء پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ حرکت کی تبدیلی (مثلاً کسی سیارہ کی صورت میں) قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خط مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے ۔

کپلر کے پہلے اور دوسرے کلیوں سے نیوٹن نے یہ ثابت کیا کہ ہر سیارہ ایک ایسی قوت کے زیر اثر حرکت کرتا ہے جس کی سمت ہمیشہ سورج کی طرف ہوتی ہے اور جو سورج سے فاصلہ کے مُربع کے بالعکس بدلتی ہے ۔ کپلر کے تیسرے کلیہ سے نیوٹن نے ایک سیارہ کے اسراع کا مقابلہ دوسرے سیارہ کے اسراع کے ساتھ کیا اور اس سے وہ اُس عالمگیر تجاذب کے قانون پر پہنچا جس کے ساتھ اِس کا نام وابستہ ہے اور جو یہ ہے کہ مادہ کا ہر ذرہ ہر دوسرے ذرہ کو ایک ایسی قوت سے کشش کرتا ہے جو اِنکی کمیتوں کے حاصل ضرب کے بالراست اور اِن کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے ۔

ہم اول یہ ثابت کرینگے کہ اگر وہ سمتی نیم قطر جو ایک ثابت نقطہ سے ایک متحرک ذرہ تک کھینچا گیا ہو مساوی وقتوں میں مساوی رقبے عبور کرے تو ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کی سمت ہمیشہ اِس ثابت نقطہ کی طرف ہونی چاہیئے ۔

اگر سمتی نیم قطر س پ، ر ہو اور طہ وہ زاویہ جو یہ سمتی نیم قطر کسی ثابت سمت س و کے ساتھ بناتا ہے تو س پ پر اور اس کے علی القوائم

شکل (۵۲)

رفتاریں علی الترتیب

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ت}}$$

ہیں۔

صغیر وقت مف ت کے بعد متصلہ سمتی نیم قطر پر اور اِس کے علی القوائم رفتاریں

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} + \text{مف ت}\,\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فر ت}^2} \text{ ، } \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ت}} + \text{مف ت}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)$$

ہونگی۔ اِن رفتاروں کو ابتدائی سمتی نیم قطر کی سمت میں تحلیل کرنے سے (جس کے ساتھ متصلہ سمتی نیم قطر زاویہ مف ت × فر طہ\فر ت بناتا ہے) حاصل ہوتا ہے (۱۴۸)

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} + \text{مف ت}\,\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فر ت}^2} - \text{مف ت}\,\frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ت}}\,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$$

اِس لیے اگر س کی طرف اسراع ـ ف ہو تو

$$-\text{ف} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{ر}}{\text{فرت}^{۲}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲}$$

اسی طرح رفتاروں کو ابتدائی سمتی نیم قطر کے عمود وار تحلیل کرنے سے اس سمت میں جزو تحلیلی حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} + \text{مف ت}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) + \text{مف ت}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$$

اس لیے ابتدائی سمتی نیم قطر کے عمود وار اسراع کے لیے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^{۲}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)$$

سمتی نیم قطر وقت مف ت میں جتنا رقبہ عبور کرتا ہے اُس کا دُگنا $\text{ر}^{۲}\,\text{فرطہ}$ ہے اور اگر یہ دو مقداریں مستقل نسبت رکھتی ہوں جیسا کہ کیپلر کے دوسرے کلیہ کی بموجب ایک سیارہ کی حرکت کی صورت میں درست ہے تو

$$\text{ر}^{۲}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{م، مستقل}$$

اور اس لیے

$$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^{۲}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) = ۰$$

پس سمتی نیم قطر کے علی القوائم نہ کوئی اسراع ہے، نہ کوئی حرکت کی تبدیلی، اور اس لیے نیوٹن کے دوسرے کلیہ کی بموجب کوئی قوت بھی نہیں ہے۔ اس لیے پوری قوت، س کی طرف ہے۔ اسی طرح کیپلر کا دوسرا کلیہ اس امر کو ثابت کرتا ہے کہ سیارے ایک ایسی قوت کے زیر عمل حرکت کرتے ہیں جس کی سمت ہمیشہ سورج کے مرکز کی طرف رہتی ہے

ثانیاً یہ ثابت کرتا ہے کہ اگر کوئی جسم ایک قوت کے تحت ایک مخروطی تراش میں حرکت کرے اور اس قوت کی سمت ہمیشہ اس مخروطی تراش کے ایک ماسکہ کی طرف ہو اور اگر یہ جسم اس طور پر حرکت کرے کہ وہ سمتی نیم قطر جو اس ماسکہ سے جسم تک کھینچا گیا ہو مساوی وقتوں میں مساوی

رہتے عبور کرے تو قوت اِس ماسکی سمتی نیم قطر کے مربع کے بالعکس متناسب ہونی چاہیئے ۔

اِس ماسکہ کے حوالے سے مخروطی کی مساوات ہے

$$\text{ر} = \text{ل} \backslash (\text{۱} + \text{ز جم طہ})$$

(۱۴۹) جہاں ل نیم وتر خاص ہے، ز خروج المرکز، اور طہ وہ زاویہ جو سمتی نیم قطر (ر) اُس خط کے ساتھ بناتا ہے جو حضیض کو ماسکہ سے ملاتا ہے (دفعہ ۵۲)۔

اس طرح ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

$$\text{ر} = \text{ل} \backslash (\text{۱} + \text{ز جم طہ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ر}}{\text{فرت}^{2}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{2} = -\text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

اور

$$\text{ر}^{2}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{م} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

اِن مساواتوں سے ف یعنے سورج کی طرف اسراع معلوم کیا جا سکتا ہے چنانچہ (۱) کو تفرق کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ل ز جب طہ}}{(\text{۱} + \text{ز جم طہ})^{2}}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ز جب طہ}}{\text{ل}}\,\text{ر}^{2}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{م ز}}{\text{ل}}\,\text{جب طہ}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ر}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{م ز}}{\text{ل}}\,\text{جم طہ}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{م}^{2}\,\text{ز جم طہ}}{\text{ل ر}^{2}}$$

نیز

$$\text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \frac{\text{م}^{2}}{\text{ر}^{3}}$$

اور اس لیے

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ر}}{\text{فرت}^{2}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{2}$$

$$= \frac{\text{م}^{2}}{\text{ر}^{2}}\left\{\frac{\text{ز جم طہ}}{\text{ل}} - \frac{\text{۱}}{\text{ر}}\right\}$$

$$= \frac{\text{م}^{2}}{\text{ر}^{2}}\left\{\frac{\text{ز جم طہ}}{\text{ل}} - \frac{\text{۱} + \text{ز جم طہ}}{\text{ل}}\right\} = -\frac{\text{م}^{2}}{\text{ل ر}^{2}}$$

اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اور اِس لیے قوت مدار کے ہر نقطہ پر ماسکہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے ۔ یہ نتیجہ درست ہے خواہ ز کی قیمت کچھ ہی ہو، مدار ایک قطع ناقص ہو یا ایک قطع زائد یا ایک قطع مکافی ۔

اگر ہم اسراع کو مہ \ ر^۲ سے تعبیر کریں جہاں مہ ، اکائی فاصلہ پر سورج کی کشش کی وجہ سے اسراع ہے تو مندرجۂ بالا ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

م^۲ = مہ ل .... (۴)

اب ہم کپلر کے تیسرے کلیہ سے یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ مستقل مہ سب سیاروں کے لیے ایک ہی ہے ۔ کیونکہ م وقت کی اکائی میں مرتسمہ رقبہ کا دُگنا ہے اور اِس لیے اگر مدت دوران د ہو تو کپلر کے دوسرے کلیہ سے ہمیں حاصل ہونا چاہیئے

م = ۲ π ا ب \ د

لیکن ل = ب^۲ \ ا ۔ اِس لیے (۴) کے ذریعہ

مہ = ۴ π^۲ ا^۳ \ د^۲

(۱۵۰) لیکن کپلر کے تیسرے کلیہ کی بموجب ا^۳ \ د^۲ سب سیاروں کے لیے وہی ہے اور اس لیے مہ ، پورے نظام شمسی میں مستقل ہے ۔

اگر کسی سیارے کے مرکز سے طریق الشمس پر عمود کھینچا جائے تو سورج کے مرکز اور ♈ میں سے گذرنے والے ایک خط کو اِس عمود سے ملنے کے لیے طریق الشمس کے مستوی میں مثبت سمت میں جس قدر زاویہ میں سے گھماتا پڑتا ہے اُس کو سیارہ کا شمس مرکزی طول بلد کہتے ہیں ۔ سورج کے ارض مرکزی طول بلد میں اگر ۱۸۰° جمع کئے جائیں تو زمین کا شمس مرکزی طول بلد حاصل ہوتا ہے ۔

دو سیاروں کی **اقترانی مدت** سے مراد اُن دو متصلہ موقعوں کے درمیان اوسط وقفہ ہے جن پر یہ سیارے اقتران میں ہوتے ہیں یعنے ایک ہی شمس مرکزی طول بلد رکھتے ہیں ۔ اگر وہ ایک ہی مستوی میں

دائری مداروں پر یکساں رفتار سے حرکت کریں اور اگر ان کے دور علی الترتیب د، دَ ہوں اور وقت ت پر ان کے شمس مرکزی طول بلد لَ، ل ہوں تو

لَ = ۲π ت \ د + لَ،

ل = ۲π ت \ دَ + لَ

جہاں لَ اور لَ، وقت ت = ۰ پر طول بلد کو تعبیر کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ اقترانی مدت لا ہے اور ت. وہ وقت ہے جبکہ لَ - ل = ۰، تو ت. + لا وہ وقت ہوگا جبکہ یہ سیارے پھر اقتران میں ہوں گے اور اس وقت لَ - ل = ۲π (اگر دَ > د)۔ پس مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

۰ = ۲π ت. \ د - ۲π ت. \ دَ + لَ - لَ،

۲π = ۲π (ت. + لا) \ د - ۲π (ت. + لا) \ دَ + لَ - لَ،

اس لیے تفریق کرنے سے

لا = د دَ \ (دَ - د)

اگر ان میں سے ایک سیارہ زمین ہو، سال وقت کی اکائی، زمین کا اوسط فاصلہ طول کی اکائی، اور ا دوسرے سیارہ کا اوسط فاصلہ سورج سے تو کیپلر کے تیسرے کلیہ سے کسی بیرونی[1] سیارے کے لیے حاصل ہوتا ہے

لا = ا^۳/۲ \ (ا^۳/۲ - ۱)

اور کسی اندرونی[1] سیارے کے لیے

لا = ا^۳/۲ \ (۱ - ا^۳/۲)

مثال ۱ — یہ فرض کرکے کہ زمین کا اوسط فاصلہ سورج سے ۹۲۶۹ (اکائی ......۱ میل) ہے اور زمین کے مدار کا خروج المرکز ۰۱۶۸ ہے اس مربع کا

---

[1] بیرونی سیارہ سے مراد وہ سیارہ ہے جسکا مدار زمین کے مدار کے باہر ہے اور اندرونی سیارہ سے مراد وہ سیارہ جسکا مدار زمین کے مدار کے اندر واقع ہے۔ مترجم

ضلع معلوم کرو جس کا رقبہ اُس رقبہ کے مساوی ہو جو زمین کا شمسی نیم قطر روزانہ عبور کرتا ہے۔

نوٹ:۔ ایک سال ہمیشہ ۳۶۵٫۲۵ اوسط شمسی ایام کا لیا جا سکتا ہے جب تک کہ اِس کے خلاف نہ کہا گیا ہو۔

(۱۵۱) **مثال ۲** — اگر حضیض اور اوج پر ایک سیارہ کی رفتاریں علی الترتیب و۱، و۲ ہوں اور اگر اِسکے مدار کا خروج المرکز ز ہو تو ثابت کرو کہ

(۱ − ز) و۱ = (۱ + ز) و۲

مثال ۳ — ثابت کرو کہ کسی آن ایک سیارہ کی رفتار دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کی جا سکتی ہے ایک م | ل جو شمسی نیم قطر پر عمود ہو اور دوسرے زم | ل جو مدار کے محور اعظم پر عمود ہو۔

مثال ۴ — کپلر کے دوسرے اور تیسرے کلیوں سے ثابت کرو کہ نظام شمسی کے کوئی دو سیارے ایک دئے ہوئے وقت میں جو رقبے عبور کرتے ہیں اِن کی نسبت اِن کے وتر خاص کے جذر المربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

مثال ۵ — مشتری کا اوسط فاصلہ سورج سے ۵٫۲۰۳ ہے جبکہ طول کی اکائی سورج سے زمین کا اوسط فاصلہ ہو۔ مشتری کی مدت دوران ۱۱٫۸۶۲ سال اور عطارد کی مدت دوران ۰٫۲۴۰۸ سال ہے۔ ثابت کرو کہ سورج سے عطارد کا فاصلہ ۰٫۳۸۷ ہے۔

مثال ۶ — مریخ کے مدار کا خروج المرکز ۰٫۰۹۳۳ ہے اور سورج سے اِس کا اوسط فاصلہ سورج سے زمین کے فاصلہ کا ۱٫۵۲۳۷ گنا ہے۔ یہ مان کر کہ زمین کا فاصلہ سورج سے ۹۲۹۰۰۰۰۰ میل ہے اور اِس کے مدار کا خروج المرکز نظر انداز کیا جا سکتا ہے زمین سے مریخ کے بڑے سے بڑے اور کم سے کم ممکن فاصلوں کی تعیین کرو۔

مثال ۷ — اگر ایک سیارہ کی مدت دوران د ہو اور اِس کے نیم محور اعظم کا طول ا تو ثابت کرو کہ نیم محور اعظم میں ایک چھوٹی تبدیلی مف ا کی وجہ سے مدت دوران میں تبدیلی ۳ د مف ا \ ۲ ا پیدا ہو گی۔

مثال ۸ — ثابت کرو کہ کسی سیارہ کی حرکت میں جو ایک ناقصی مدار پر سورج کے گرد حسب قانون قدرت حرکت کرتا ہے غیر مقبوضہ ماسکہ کے گرد زاوئی رفتار ایسے بدلتی ہے جیسے سمتی نیم قطر اور مماس کے درمیانی زاویہ کی جیب کا مربع۔

فرض کرو کہ قطع ناقص کی ایک چھوٹی قوس فرس ہے جو سورج سے رفاصلہ پر اور غیر مقبوضہ ماسکہ سے رَ فاصلہ پر ہے۔ فرض کرو کہ فرس پر کے مماس پر ماسکوں سے عمود ع، عَ ہیں۔ فرض کرو کہ ط وہ زاویہ ہے جو ایک ماسکی نیم قطر مماس کے ساتھ بناتا ہے۔

کیپلر کے دوسرے کلیہ سے فوراً یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ع، سیارہ کی خطی رفتار کے بالعکس متناسب ہے اور اس لیے فرس مرتسم کرنے کا وقت ایسے بدلتا ہے جیسے ع فرس۔ وہ زاویہ جو غیر مقبوضہ ماسکہ کے گرد مرتسم ہوتا ہے فرس جب ط \ رَ ہے اور اس لئے اس غیر مقبوضہ ماسکہ کے گرد زاوئی رفتار

∝ فرس جب ط \ رَ ع فرس = جب ط \ رَ ع = جب^۲ط \ عَ ع

لیکن قطع ناقص کی خاصیت کی رو سے ع عَ مستقل ہوتا ہے، اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

مثال ۹ — ایک سیارہ سورج کے گرد ایک ناقصی مدار پر حرکت کرتا ہے اور سورج ایک ماسکہ پر ہے۔ اگر مدار کے خروج المرکز کا مربع نظر انداز کیا جا سکے تو ثابت کرو کہ سیارہ کی زاوئی رفتار دوسرے ماسکہ کے گرد یکساں ہو گی۔

مثال ۱۰ — تختۂ ذیل کی مدد سے جو بحری جنتری بابتہ سنہ ۱۸۹۰ء سے اخذ کیا گیا ہے ثابت کرو کہ زمین کے مدار کا خروج المرکز تقریباً ۰.۰۱۶۸ ہے۔ (۱۵۲)

سورج کا طول بلد

یکم جنوری	۲۸۱°	۵َ	۳۰.۱۶ً
۲ " "	۲۸۲°	۶َ	۳۹.۷ً
یکم جولائی	۹۹°	۳۲َ	۱۹.۱ً
۲ " "	۱۰۰°	۲۹َ	۴.۶ً [Coll. Exam.]

مثال ۱۱ — اگر ایک صغیر سیارہ کے مدار کو طریق الشمس کے مستوی میں ایک دائرہ تسلیم کیا جائے تو ثابت کرو کہ سیارہ اور سورج کے طول بلد کے فرق کے

دو مشاہدات معہ گذرے ہوئے وقت کے علم کے نصف قطر متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ایسے تین مشاہدات مدار کی تعیئن کریں گے اگر اُسے قطع مکافی مان لیا جائے۔

طول بلد کے فرق کے ایک واحد مشاہدہ سے یہ معلوم ہوگا کہ سیارہ ایک معلوم خط مستقیم پر واقع ہونا چاہئے یعنی اُس خط پر جو زمین کے مرکز میں سے طریق الشمس کے اُس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جو سورج سے مشاہدہ کردہ فاصلہ پر واقع ہے۔ جب ایسے دو خطوط مستقیم معلوم ہو جائیں تو ایک دائرہ جس کا مرکز سورج پر ہو ان میں سے ہر خط کو دو نقطوں میں قطع کرے گا۔ اگر ایک خط مستقیم پر کا ایک نقطہ تقاطع اور دوسرے خط مستقیم پر کا ایک نقطہ تقاطع سورج پر وہ زاویہ بنائیں جس سے اُس نصف قطر کیلیے وقت کا مشاہدہ کردہ وقفہ حاصل ہو جائے تو مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔ پس آزمائش سے اس طریقہ پر نصف قطر کی تعیئن ہو گی۔ نصف قطر کی مساوات بھی معلوم کیجا سکتی ہے لیکن یہ بھی صرف آزمائش سے حل کی جا سکتی ہے۔

مثال ۱۲ — ثابت کرو کہ ایک مدت اقتران میں کوئی سفلی سیارہ نصف النہار کو اتنے ہی مرتبہ عبور کرتا ہے جتنی مرتبہ سورج لیکن کوئی علوی سیارہ ایک مرتبہ زائد عبور کرے گا۔

مثال ۱۳ — مشتری کے چوتھے قمر کا مداری دَور

دن	گھنٹے	منٹ	ثانئے	
۱۶	۱۸	۵	۶،۹	= ۱۶،۷۵۳۵۵۲ دن

ہے اور پانچویں قمر کا دور ۱۱ گھنٹے ۵۷ منٹ ۲۷،۶ ثانئے = ۰،۴۹۸۲۳۶ دن ہے کیپلر کے تیسرے کلیئہ کی مدد سے مشتری سے اِن دو قمروں کے اوسط فاصلوں کی نسبت معلوم کرو۔

مثال ۱۴ — یہ مان کر کے مریخ کے قمر دیموس (Deimos.) اور فوبوس (Phobos.) دائری مداروں میں گردش کرتے ہیں اور یہ کہ ۲۴ ستمبر ۱۹۰۹ء کے تقابل (Opposition.) پر مریخ کے مرکز سے دیموس کا بڑے سے بڑا مشاہدہ کردہ فاصلہ ۱' ۱ء۲۳" تھا کیپلر کے تیسرے کلیئہ سے ثابت کرو کہ فوبوس کا بڑے سے بڑا ظاہری

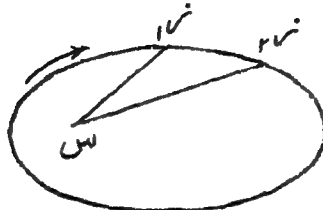
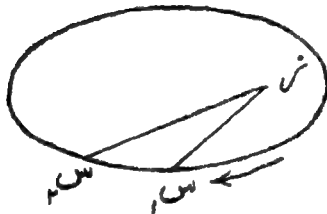
فاصلہ ۲۲ء۳۳ ہے جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ فوبوس کی مدت دَوران ۷ گھنٹے ۳۹ منٹ ۱۲ء۸۵ ثانئے ہے اور دیموس کی ۳۰ گھنٹے ۱۷ منٹ ۵۴ء۸۶ ثانئے۔

۵۱ ـ سورج کی ظاہری حرکت ـ

سورج کے گرد زمین کی گردش سے سورج کے ظاہری مقام اور اس کی ظاہری جسامت دونوں میں تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ سورج کو زمین سے دیکھا جاتا ہے۔ اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ منظر جس سے ہمیں اِس باب میں واسطہ ہے بالکل ٹھیک ٹھیک پیدا کیا جا سکتا ہے اگر زمین فی الواقعی ساکن ہوتی اور سورج زمین کے گرد ایک ایسے مدار پر حرکت کرتا جو کیپلر کے کلیوں کے مطابق ہوتا اور شکل اور ناپ میں سورج کے گرد زمین کے مدار کے مماثل ہوتا۔ (۱۵۳)

فرض کرو کہ س (شکل ۵۳) سورج ہے اور ز۱ اور ز۲ زمین کے دو محل ہیں ـ ز۱ سے سورج سمت ز۱س میں نظر آتا ہے اور اس کا فاصلہ ز۱س ہے۔

شکل ۵۴ میں ز سے زس۱، ز س۲ ز۱س، ز۲س کے متوازی اور مساوی کھینچو۔ اسی طرح فرض کرو کہ زس۲، ز۲س کے مساوی اور متوازی ہے۔ اگر ایسے نقطوں ز۳، س۳ وغیرہ کے دوسرے زوجوں کے لیے دُہرایا جائے تو وہ قطع ناقص جو س۱، س۲، س۳ ..... سے مرتسم ہوگا شکل اور ناپ میں بالکل اُس قطع ناقص کے مماثل ہوگا جو ز۱، ز۲، ز۳ وغیرہ سے مرتسم ہوتا ہے ـ ثانی الذکر قطع ناقص سورج کے گرد زمین کا حقیقی راستہ ہے اور اول الذکر وہ راستہ ہے جسے سورج زمین کے گرد مرتسم کرتا نظر آتا ہے ـ ہر آن سورج کی ظاہری سمت اور اس کا فاصلہ وہی ہوتے ہیں خواہ ہم یہ سمجھیں کہ زمین ثابت سورج کے گرد گھوم رہی ہے (شکل ۵۳) یا یہ سمجھیں کہ سورج ثابت زمین کے گرد گھوم رہا ہے (شکل ۵۴) ـ

اگر سورج کا نصف قطر ا ہو اور زمین سے سورج کے مرکز کا فاصلہ ر ہو (یہاں ہم سورج کے مرکز کو ایک نقطہ تصور کرینگے) تو سورج کے

ظاہری نیم قطر ا کی زاوئی قیمت جبکہ زمین سے دیکھا جائے جب ا/ر ہے۔

یہ زاویہ چونکہ چھوٹا ہے اس لیے ہم اس کی قیمت قوس کے ثانیوں میں کافی تقریب کے طور پر ا = ا/ر جب اَ لے سکتے ہیں۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ر، ا کے بالعکس بدلتا ہے، اس لیے اگر سال کی دو مختلف تاریخوں پر ا کو مشاہدہ سے معلوم کیا جائے تو سورج کے اضافی فاصلے ان تاریخوں پر فوراً حاصل ہوتے ہیں۔

شکل (۵۳)

شکل (۵۴)

مثال — بتاریخ ۲ جنوری ۱۹۰۹ء سورج کا زاوئی نیم قطر ۱۶ ۱۸، ۱۷ ہے، اس وقت سورج زمین سے کم سے کم فاصلہ پر ہے۔ بتاریخ ۴ جولائی ۱۹۰۹ء سورج کا زاوئی نیم قطر ۱۵ ۱، ۴۶۳۲ ہے، اوس وقت سورج زمین سے زیادہ سے زیادہ فاصلہ پر ہے۔ ان مفروضات سے ثابت کرو کہ زمین کے مدار کا خروج المرکز ۰.۰۱۶۷ ہے۔

۵۲ — ناقصی حرکت محسوب کرنا۔

(۱۵۴)

فرض کرو کہ ف زمین کا مرکز ہے اور و پ وَ قطع ناقص ہے جس کا ماسکہ ف ہے اور جس میں سورج اپنی سالانہ گردش کی تکمیل کرتا ہوا نظر آتا ہے۔ اس ناقص کا محور اعظم و وَ ہے اور اس کا مرکز ج ہے۔ اور اس کا نصف قطر ج و = $\frac{1}{2}$ و وَ = ا۔ خط ق پ ھ، و وَ پر

عمود ہے اور ف پ = ر۔
فرض کرو کہ زاویہ وَف پ = و
اور زاویہ وَ ج ق = ع۔
اِس لیے مبداء ف اور محور
ف وَ کے لحاظ سے پ
کے قطبی محدد و، ر ہیں۔ زاویوں
و اور ع کو علی الترتیب اصلی
بے قاعدگی (True anomaly)
اور خروج المرکزی بے قاعدگی
(Eccentric anomaly)
کہتے ہیں۔

شکل (۵۵)

نقطے و اور وَ جو قطع ناقص کے محور اعظم کے سرے ہیں مدار کے اوجین کہلاتے ہیں۔ اوج و جو زمین سے قریب ترین ہے قریب ارضی (Perigee.) کہلاتا ہے اور اوج وَ جو زمین سے بعید ترین ہے بعید ارضی (Apogee.) کہلاتا ہے۔ وقت اُس لمحہ سے ناپا جاتا ہے جو (Epoch.) کے طور پر مشہور ہے جبکہ سورج قریب ارضی و میں سے گذرتا ہے۔ اگر سورج کے گرد زمین کی حقیقی حرکت زیر بحث ہوتی تو نقطوں و اور وَ کو علی الترتیب حضیض اور اوج کہتے۔ نیز یہ قابل یادداشت ہے کہ ج ف = ز ج و = ز ا۔

اب ہمیں یہ دکھانا ہے کہ سورج کے قطبی محدد کس طرح معلوم کئے جاتے ہیں جبکہ وقت دیا گیا ہو۔ ت کی رقوم میں ر اور و کی محدود قیمتیں حاصل کرنا ممکن نہیں ہے لیکن خروج المرکزی بے قاعدگی ع کی مدد سے سلسلوں میں بھلے حاصل کئے جا سکتے ہیں جن سے ر اور و کی قیمتیں کسی مطلوبہ تقرب تک محسوب کی جا سکتی ہیں۔

کیپلر کے دوسرے کلیہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ت وہ وقت ہو جسمیں

سورج و سے ب تک حرکت کرتا ہے اور اگر مدار کی مدت دوران ت ہو تو

ت : ت ا :: رقبہ وف پ : ناقص کا رقبہ

اگر ہم ن سے اوسط حرکت کو تعبیر کریں یعنی اگر ن اُس زاویہ کی اوسط قیمت کا دائری ناپ ہو جو اکائی وقت میں سمتی نیم قطر سے عبور ہوتا ہے تو ن = ۲π\ت (۱۵۵)
اور چونکہ ناقص کا رقبہ π ا ب ہے اس لیے

ن ت = ۲ × رقبہ وف پ\ا ب

زاویہ ن ت بہت اہمیت رکھتا ہے، اسے ہم اوسط بے قاعدگی (Mean anomaly) کہیں گے اور اس کو ط سے تعبیر کریں گے۔

قطع ناقص کے خواص سے پ ھ\ق ھ = ب\ا، اس لیے

رقبہ و ھ پ

= ب × و ھ ق\ا = ب (و ج ق - ھ ج ق)\ا

= ½ ا ب (ع - جب ع جم ع)

نیز رقبہ ف ھ پ

= ب × ق ھ × ف ھ\۲ا = ½ ا ب (جب ع جم ع - ز جب ع)

اس لیے وف پ = و ھ پ + ف ھ پ = ½ ا ب (ع - ز جب ع)

اور آخر الامر ط = ع - ز جب ع ، .... (۱)

پس ط، ع کی رقوم میں بیان ہو چکا اور اب ہم و کو ع کی رقوم میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

قطع ناقص سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ر جم و = ا جم ع - ا ز ،

ر جب و = ب جب ع

اس لیے مربع لینے اور جمع کرنے سے

ر = ا (۱ - ز جم ع) ، .... (۲)

۲ ر جب² ½ و = ر (۱ - جم و) = ا (۱ - ز جم ع - جم ع + ز)

$$= \text{ا}\,(\text{۱}+\text{ز})(\text{۱}-\text{جم ع})\text{،}$$

$$\text{۲ر جم}^{\text{۲}}\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{و} = \text{ر}(\text{۱}+\text{جم و}) = \text{ا}(\text{۱}-\text{ز جم ع}+\text{جم ع}-\text{ز})$$

$$= \text{ا}(\text{۱}-\text{ز})(\text{۱}+\text{جم ع})$$

اور بالآخر

$$\text{مس}\,\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{و} = \sqrt{\frac{\text{۱}+\text{ز}}{\text{۱}-\text{ز}}}\;\text{مس}\,\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ع}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots(\text{۳})$$

[* **لگرانج کے مسئلہ کا اطلاق** ۔ اگر ہم (۱) اور (۳) سے ع کو ساقط کرسکیں تو ط اور و کے درمیان ایک رشتہ ملجاتا ہے لیکن یہ مساواتیں ماورائی نوعیت کی ہیں اور اس لیے محدود رقموں میں ایسا اسقاط ناممکن ہے ۔ تاہم لگرانج کے مسئلہ کی مدد سے ہم و کو ط کی رقوم میں ز کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ کے ذریعہ بیان کرسکتے ہیں ۔ اس سلسلہ سے ط اور ز کی دی ہوئی قیمتوں کے لیے ہم و کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک محسوب کرسکیں گے ۔

لگرانج کا مسئلہ یہ ہے :- اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$\text{ی} = \text{لا} + \text{ما فہ}(\text{ی})\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۱})$$

جس میں لا اور ما تبوع متغیر ہیں اور اگر فا(ی)، ی کا کوئی تفاعل ہو تو (۱۵۶)

$$\text{فا}(\text{ی}) = \text{فا}(\text{لا}) + \text{ما فہ}(\text{لا})\,\text{فاَ}(\text{لا}) + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\{\text{فہ}(\text{لا})\}^{\text{۲}}\,\text{فاَ}(\text{لا})\right]$$

$$+ \ldots + \frac{\text{ما}^{\text{ن}}}{\text{۱}\times\text{۲}\times\ldots\text{ن}}\,\frac{\text{فر}^{\text{ن}-\text{۱}}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-\text{۱}}}\left[\{\text{فہ}(\text{لا})\}^{\text{ن}}\,\text{فاَ}(\text{لا})\right] + \ldots(\text{۲})$$

جس میں فاَ(لا) حسب معمول $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\{\text{فا}(\text{لا})\}$ کو تعبیر کرتا ہے ۔

اس کا اطلاق زیر بحث صورت پر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم ی کی بجائے ع، لا کی بجائے ط، ما کی بجائے ز لکھیں اور اگر فہ(ع) = جب ع

رکھیں تو مساوات (ل) مساوات (ا) کے مماثل ہو جاتی ہے۔ علاوہ ازیں اگر ہم (۳) کو شکل و = فا (ع) میں لکھیں تو مساوات (ا) سے حاصل ہوتا ہے

$$و = فا(ع) = فا(ط) + ز جب ط فاَ(ط) + \frac{ز^۲}{\underline{|۲}} \frac{ف}{ف ط}\{جب^۲ ط فاَ(ط)\}$$

$$+ \frac{ز^۳}{\underline{|۳}} \frac{ف^۲}{ف ط^۲}\{جب^۳ ط فاَ(ط)\} + \ldots\ldots (ب)$$

لیکن مساوات (۳) سے اس مشہور مثلثی پھیلاؤ کے ذریعہ جو صفحہ ۲۲۵ میں ثابت کیا گیا ہے حاصل ہوتا ہے

$$و = فا(ع) = ع + ۲\{ج جب ع + \frac{۱}{۲} ج^۲ جب ۲ع + \frac{۱}{۳} ج^۳ جب ۳ع + \ldots\}$$

جہاں $ج = \{۱ - \sqrt{۱ - ز^۲}\} \backslash ز$۔ اس لیے

$$فا(ط) = ط + ۲\{ج جب ط + \frac{۱}{۲} ج^۲ جب ۲ط + \frac{۱}{۳} ج^۳ جب ۳ط + \ldots\}$$

اور اس لیے

$$فاَ(ط) = ۱ + ۲\{ج جم ط + ج^۲ جم ۲ط + ج^۳ جم ۳ط + \ldots\}$$

پس مساوات (ب) کی بائیں جانب کی سب رقمیں محسوب کی جا سکتی ہیں اور اس طرح و صحت کے کسی مطلوبہ درجہ تک حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دیکھو ضابطہ (۷) صفحہ ۲۴۷]

کیپلر کا مسئلہ۔ مساوات (ا) کے حل کرنے کو یعنی ع کے متعین کرنے کو جبکہ ط دیا گیا ہو کیپلر کا مسئلہ کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ع کی ایک تقریبی قیمت $ع_۰$ ہے جو تخمین سے یا کسی اور ذریعہ سے حاصل ہوئی ہے اور فرض کرو کہ

$$ع_۰ - ز جب ع_۰ = ط_۰$$

اگر ع کی اصلی قیمت $ع_۰ +$ مف $ع_۰$ ہو تو (ا) میں اندراج کرنے سے

تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے

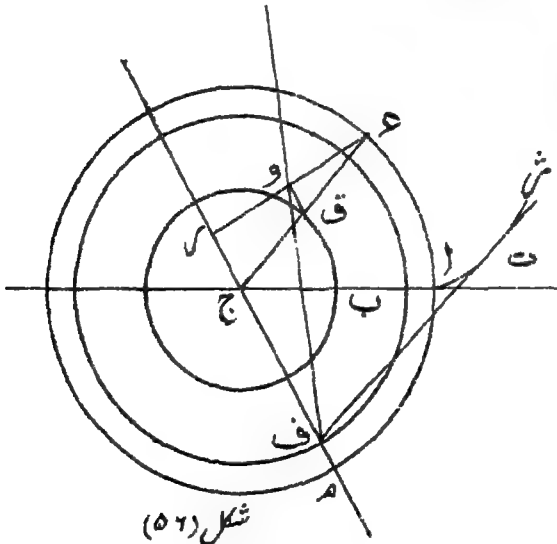
$$\text{مف } ع = \frac{ط - ط_۰}{۱ - ز \text{ جم } ع} \text{ ،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

(۱۵۶) کاگنولی نے یہ ثابت کیا ہے کہ تقرب کے اِس طریقہ میں زیادہ صحت حاصل کی جا سکتی ہے اگر ضابطہ (۴) کی بجائے ضابطہ

$$\text{مف } ع = \frac{ط - ط_۰}{۱ - ز \text{ جم} \left\{ ع_۰ + \frac{۱}{۲}(ط - ط_۰) \right\}}$$

استعمال کیا جائے۔

جیسا کہ اڈمیس (Adams)[1] نے بیان کیا ہے یہ دونوں طریقے دراصل نیوٹن کے مجوزہ ہیں۔

کیپلر کے مسئلہ کو ترسیمی طریقوں کی مدد سے حل کرنیکے لیے متعدد عمل استعمال کئے جا چکے ہیں۔ اِن میں سے ایک ترسیمی حل یہاں درج کیا جاتا ہے جس کے لیے میں ڈاکٹر رامبو (Dr. Rambaut)[2] کا ممنون ہوں۔

تین ہم مرکز دائرے (شکل ۵۶) کھینچو جنکے نصف قطر علی الترتیب ج ب = ب، ج ق = ا ز اور ج م = ا ہوں۔ اِن دائروں کو علی الترتیب صغیر دائرہ، ماسکی دائرہ اور کبیر دائرہ کے

شکل (۵۶)

---

[1] "Collected works" Vol. 1, p. 291

[2] "Monthly Notices" R. A. S. vol. LXVI p. 519. کے ساتھ مقابلہ کرو۔

نام سے موسوم کیا جائے گا۔ کبیر دائرہ کے کسی نقطہ ا سے ابتدا کر کے
اس کا دریچہ ا ت ش کھینچو۔ فرض کرو کہ ج ا وہ سمت ہے جہاں سے
اوسط بے قاعدگی ط (= زاویہ ا ج م) کی پیمائش کی جاتی ہے۔ اب ط
کے جواب میں ر، ع، و کی قیمتیں معلوم کی جا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ج م ر ماسکی دائرہ کو ف پر قطع کرتا ہے۔ ف پر
دریچہ کا عماد کبیر دائرہ کا مماس ہے۔ فرض کرو کہ اس کا نقطہ تماس ع ہے
تو ج ع جو صغیر دائرہ کو ق پر قطع کرتا ہے ف ت کے متوازی ہے۔
دریچہ کی لازمی خاصیت کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوس ا ع = ع ت (۱۵۸)
لیکن

ع ت = ج ف جب ف ج ع = ا ز جب ف ج ع

اسلیے ا ز جب ف ج ع = ا (زاویہ ف ج ع - زاویہ ا ج ف)
جو سادہ شکل

ط = ع - ز جب ع

اختیار کرتا ہے اگر ہم زاویہ ف ج ع = ع رکھیں۔

اگر ع سے ج ف پر عمود ع ر اور ق سے ع ر پر عمود
ق و کھینچے جائیں تو

ف و جم م ف و = ج ع جم ع - ج ف = ا جم ع - ا ز،

ف و جب م ف و = ج ق جب ع = ب جم ع

پس جب مذکورہ بالا تین دائرے اور دریچہ ا ت ش کھینچ لئے
جائیں تو کیپلر کے مسئلہ کے حل کو اختصاراً اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے:۔

کبیر دائرہ پر ایک نقطہ م ایسا لو کہ زاویہ ا ج م = ط۔ نقطہ ف
سے جو ج م اور ماسکی دائرہ کا نقطہ تقاطع ہے دریچہ کا مماس ف ت
کھینچو اور ج میں سے ج ق ع، ف ت کے متوازی کھینچو جو کبیر اور صغیر
دائروں کو علی الترتیب ع اور ق پر قطع کرے۔

تب زاویہ ا ج م = ط، زاویہ م ف و = و،

زاویہ م ج ع = ع، ف و = ر

اور مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔

[باؤشینگر (Bauschinger)[1] کی جدولیں اور اسی قسم کی دوسری جدولیں ع معلوم کرنے کے سوال کو حل کرنے میں بڑی مدد دیتی ہیں جبکہ ط اور ز دئے گئے ہوں۔ ہم اِن کے استعمال کی توضیح حسب ذیل سوال سے کرتے ہیں۔

ہیلی کے دُمدار تارے (Comet) کے مدار کے لئے حسب ذیل مفروضہ عناصر دئے گئے ہیں :۔

خروج المرکز ز = ۰٫۹۶۷۳۳

حضیض سے گذرنے کا وقت = ۲۴ مئی سنہ ۱۹۱۰ء

دَورِ د = ۷۶٫۰۸۵ سال

اس تارے کی خروج المرکزی اور اصلی بے قاعدگیاں بتاریخ ۲۴ مئی سنہ ۱۹۰۰ء معلوم کرو۔

اوسط حرکت = ۳۶۰° \ د اور چونکہ حضیض پر پہنچنے کے لیے ابھی دس سال باقی ہیں اس لیے

$$ط = \frac{۶۰ \times ۶۰ \times ۳۶۰ \times ۱۰}{۷۶٫۰۸۵} = ۱۷۰۳۳۵٫۸''$$

$$= ۴۷° \; ۱۸' \; ۵۵٫۸''$$

دوہرے داخلہ کی باؤشینگر کی جدولیں دلیلوں ط = ۴۷٫۳° اور ز = ۰٫۹۶۷ کے لیے دیکھنے سے خروج المرکزی بے قاعدگی کی تقریبی قیمت **(۱۵۹)**

ع = ۱۰۱٫۳°

حاصل ہوتی ہے۔

---

[1] دیکھو باؤشینگر کی "Astronomical Tables" جس کو Engelmann, Leipzig نے شائع کیا ہے۔

پھر ضابطہ (۴) سے ہم مف ع۰ کو حسب طریقہ ذیل محسوب کرتے ہیں:—

ل جب ع۰ = ۹٫۹۹۱۴۹۸۴ ‏ ‏ ‏ ل جم ع۰ = ۹٫۲۹۲۱۴ (ن)

ل ز = ۹٫۹۸۳۰۵۴۷ ‏ ‏ ‏ ل ز = ۹٫۹۸۳۰۵

لوک قم آ = ۵٫۳۱۴۴۲۵۱ ‏ ‏ ‏ ل زجم ع۰ = ۹٫۲۷۵۱۹ (ن)

لوک زجب ع۰ = ۵٫۲۸۸۹۷۸۲ ‏ ‏ ‏ ∴ ۱ - زجم ع۰ = ۱٫۱۸۸۴

زجب ع۰ = ″۱۹۴۵۲۶٫۲ ‏ ‏ ‏ لوک (ط - ط۰) = ۲٫۲۶۰۰۷

= ۵۴° ۲′ ۶٫۲″ ‏ ‏ ‏ لوک (۱ - زجم ع۰) = ۰٫۰۷۴۹۶

ع۰ = ۱۰۱° ۱۸′ ۰٫۰″ ‏ ‏ ‏ لوک مف ع۰ = ۲٫۱۸۵۱۱

ط۰ = ۴۷° ۱۵′ ۵۳٫۸″ ‏ ‏ ‏ مف ع۰ = ″۱۵۳٫۱۵

ط = ۴۷° ۱۸′ ۵۵٫۸″ ‏ ‏ ‏ = ۰° ۲′ ۳۳٫۱۵″

ع۰ = ۱۰۱° ۱۸′ ۰٫۰۰″

∴ ط - ط۰ = ″۱۸۲٫۰ ‏ ‏ ‏ ∴ ع۱ = ۱۰۱° ۲۰′ ۳۳٫۱۵″

یہ قیمت ع کی اصلی قیمت سے بہت زیادہ قریب ہونی چاہئے۔ اس کی تصدیق کے لیے ہم دوسرے تقرب کا عمل کرتے ہیں۔

ل جب ع۱ = ۹٫۹۹۱۴۳۳۸

ل ز = ۹٫۹۸۳۰۵۴۷

لوک قم آ = ۵٫۳۱۴۴۲۵۱

لوک زجب ع۱ = ۵٫۲۸۸۹۱۳۶

زجب ع۱ = ″۱۹۴۴۹۷٫۳۱

= ۵۴° ۱′ ۳۷٫۳۱″

ع۱ = ۱۰۱° ۲۰′ ۳۳٫۱۵″

ط۱ = ۴۷° ۱۸′ ۵۵٫۸۴″

ط = ۴۷° ۱۸′ ۵۵٫۸۰″

∴ ط − ط۱ = −۰٫۰۴″

یہ خفیف فرق بالکل قابل نظر انداز ہے لیکن اگر اس کا لحاظ کیا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ۱ − ز جم ع۱ اور ۱ − ز جم عؔ میں جسے محسوب کیا جا چکا ہے قابل قدر فرق نہیں ہوگا اور ہمیں حاصل ہوگا

مف ع۱ = (ط − ط۱) / (۱ − ز جم ع۱) = (ط − ط۱) / (۱ − ز جم عؔ) = −۰٫۰۴″ / ۱٫۲ = −۰٫۰۳″

اور اس لیے بالآخر ع = ۱۰۱° ۲۰′ ۱۲٫۳۳″

خروج المرکزی بے قاعدگی ع = ۱۰۱° ۲۰′ ۱۲٫۳۳″ معلوم کر لینے کے بعد ہم اسے مساوات (۳) میں و معلوم کرنے کے لیے درج کرتے ہیں۔ اس مقصد کے لیے مساوات (۳) کو شکل

مس ½ و = مس (½ π + ½ فہ) مس ½ ع

میں لکھ لینا سہولت کا باعث ہے جہاں جب فہ = ز۔

اگرچہ باؤشینگر کی جدولیں مطلوبہ قیمت کو ایک اچھے تقریب تک فوراً حاصل کر لینے کے لیے مفید ہیں تاہم وہ ناگزیر نہیں ہیں۔ ترسیمی طریقوں میں سے کسی ایک سے ع کی تعئین اس کی اصلی قیمت سے تین یا چار درجوں کے اندر فوراً ہو جائے گی۔ پھر ہم چار مقامی لوکارتموں کی مدد سے ایک قیمت اتنی صحت کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں جتنی جدولوں سے حاصل کرنا ممکن ہے۔ مثلاً اگر ہم نے ترسیمی عمل سے عؔ = ۱۰۵° حاصل کیا ہے تو اسکے بعد طریقہ ذیل انجام پا سکتا ہے:—

(۱۶۰)

ل جب عؔ = ۹٫۹۸۴۹	ل جم عؔ = ۹٫۴۱۳۰ (ن)
لوک ز قم آ = ۵٫۲۹۷۵	ل ز = ۹٫۹۸۳۱
لوک ز جب عؔ = ۵٫۲۸۲۴	ل ز جم عؔ = ۹٫۳۹۶۱ (ن)
ز جب عؔ = ۱۹۱۶۰۰″	۱ − ز جم عؔ = ۱٫۲۴۹
= ۵۳° ۱۳٫۳′	

ع = ۶٫۰ ۱۰۵

ط = ۴۶٫۷ ۵۱

ط = ۱۸۱٫۹ ۴۷

ط - ط = - ۴ ۲۷٫۸

= - ۴٫۴۶°

لوک (ط - ط) = ۹۳ ۰٫۶۴۹۳ (ن)

لوک (۱ - ز جم ع) = ۰٫۰۹۶۶

لوک مف ع = ۰٫۵۵۲۷ (ن)

مف ع = - ۳٫۶°

ع = ۱۰۵٫۰

ع = ۱۰۱٫۴

اکثر صورتوں میں جو مسئلے پیش ہوتے ہیں اُن میں خروج المرکز بہت چھوٹا ہوتا ہے، مثلاً سورج کے گرد زمین کی حرکت میں خروج المرکز ۰٫۰۱۶۷ سے زیادہ نہیں ہوتا۔ ایسی صورتوں میں سب سے بہتر یہ ہے کہ سورج کی اصلی بے قاعدگی و کے لیے ط کی رقوم میں ایک تقریبی جملہ ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل کیا جائے، اِس سلسلہ کو اکثر مقاصد کے لئے ز۳ سے آگے لیجانے کی ضرورت نہیں ہوگی۔]

ز کی بجائے جب فہ لکھنے سے دفعہ ۵۲ مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے

مس ½ و = مس ½ ع (۱ + مس ½ فہ) \ (۱ - مس ½ فہ)

اِس لیے اگر نیپیری لوکارتموں کی اساس قو ہو تو

(قو^(خو\۲) - قو^(-خو\۲)) \ (قو^(خو\۲) + قو^(-خو\۲))

= (۱ + مس ½ فہ) (قو^(خع\۲) - قو^(-خع\۲)) \ (۱ - مس ½ فہ) (قو^(خع\۲) + قو^(-خع\۲))

یا　قو^(خو) = قو^(خع) (۱ - قو^(-خع) مس ½ فہ) \ (۱ - قو^(خع) مس ½ فہ)

اور طرفین کے لوکارتم لینے سے

و = ع + ۲ (مس ½ فہ جب ع + ½ مس² ½ فہ جب ۲ع + ۰۰۰)

اِس ضابطہ کو خروج المرکز ز کی رقوم میں بیان کرنے کے لیے حاصل ہوتا ہے

سس $\frac{1}{2}$ فہ = (۱ - $\sqrt{\text{۱ - ز}^2}$) \ ز = $\frac{1}{2}$ ز + $\frac{1}{8}$ ز^3 + ...

اور اندراج سے

و = ع + (ز + $\frac{1}{4}$ ز^3) جب ع + $\frac{1}{4}$ ز^2 جب ۲ع + $\frac{1}{12}$ ز^3 جب ۳ع .. (۵)

(۱۶۱)

اب اِس ضابطہ اور

ط = ع - ز جب ع

سے ع کو ساقط کرنا باقی ہے۔

پہلے تقرب کے طور پر رکھو

ع = ط + ز جب ط

اگر ز^2 کے آگے کی رقمیں نظرانداز کی جائیں تو

ع = ط + ز جب (ط + ز جب ط)

= ط + ز جب ط + $\frac{1}{2}$ ز^2 جب ۲ ط

اور اس سے حاصل ہوتا ہے

جب ع = (۱ - $\frac{1}{8}$ ز^2) جب ط + $\frac{1}{2}$ ز جب ۲ط + $\frac{3}{8}$ ز^2 جب ۳ط

اِسے مساوات

ع = ط + ز جب ع

میں درج کرنے سے

ع = ط + (ز - $\frac{1}{8}$ ز^3) جب ط + $\frac{1}{2}$ ز^2 جب ۲ط + $\frac{3}{8}$ ز^3 جب ۳ط

...... (۶)

نیز ز کی پہلی قوت تک

جب ۲ ع = جب ۲ط + ز (جب ۳ ط - جب ط)

اِن قیمتوں کو مساوات (۴) میں داخل کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$و = ط + (۲ ز - \frac{۱}{۴} ز^{۳}) جب ط + \frac{۵}{۴} ز^{۲} جب ۲ ط + \frac{۱۳}{۱۲} ز^{۳} جب ۳ ط$$

.... (۷)

یہ مساوات علم ہئیت میں ایک اساسی مساوات ہے۔ اِس سے کسی سیارہ کی اصلی بے قاعدگی اس کی اوسط بے قاعدگی کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔ یہاں اسے خروج المرکز کی تیسری قوت تک محسوب کیا گیا ہے لیکن موجودہ مقاصد کے لیے تیسری قوت بالعموم بہت چھوٹی ہوتی ہے اور اِس لیے ناقابل توجہ۔ پس ضابطہ

$$و = ط + ۲ ز جب ط + \frac{۵}{۴} ز^{۲} جب ۲ ط$$

کو یہاں کافی صحیح ضابطہ سمجھا جائے گا۔

اصلی بے قاعدگی اور اوسط بے قاعدگی کے فرق یعنی و ـ ط کو **مرکزی مساوات** کہتے ہیں اور اسے

$$۲ ز جب ط + \frac{۵}{۴} ز^{۲} جب ۲ ط$$

سے تعبیر کرتے ہیں۔

اوسط بے قاعدگی کو اصلی بے قاعدگی کی رقوم میں بیان کرنا۔

وہ صغیر رقبہ جو سمتی نیم قطر سے عبور ہوتا ہے جبکہ سیارہ کی اصلی بے قاعدگی بقدر فرو کے بڑھتی ہے $\frac{۱}{۲}$ ر^{۲} فرو ہے۔ اگر اس رقبہ کو مرتسم کرنے میں وقت فرت صرف ہو اور اگر سیارہ کی مدت دوران ت ہو تو کپلر کے دوسرے کلیہ سے

$$\frac{۱}{۲} ر^{۲} فرو : \pi ا ب :: فرت : ت$$

(۱۶۲) اگر وقت فرت میں اوسط بے قاعدگی میں اضافہ فرط ہو تو

$$فرط : ۲ \pi :: فرت : ت$$

اس لیے $\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ز ب}}$ ، .... (۸)

اس مساوات کو حسب ذیل طریقہ پر بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \frac{(۱-\text{ز}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{(۱+\text{ز جم و})^{۲}}$$

اسلیے $\text{ط} = (۱-\text{ز}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} \int_{0}^{\text{و}} (۱-۲\,\text{ز جم و} + ۳\,\text{ز}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\text{و} - ۴\,\text{ز}^{۳}\,\text{جم}^{۳}\text{و})\,\text{فرو}$

اور تکمل سے

$$\text{ط} = \text{و} - ۲\,\text{ز جب و} + \frac{۳}{۲}\,\text{ز}^{۲}\,\text{جب ۲و} - \frac{۱}{۳}\,\text{ز}^{۳}\,\text{جب ۳و} \text{ ، } \ldots\ldots (۹)$$

جس میں ز کی تین سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز کی گئی ہیں ۔

[* **عام پھیلاؤ** ۔ یہ سلسلہ حسب طریقہ ذیل حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

(۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \text{جم}^{۲}\text{فہ}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرفہ}}\left(\frac{\text{جب فہ}}{۱+\text{جب فہ جم و}}\right) \text{ جہاں ز = جب فہ}$$

اگر ہم $\text{لا} = \text{و}^{\text{خ و}}$ رکھیں تو اس کی تصدیق کرنا آسان ہے کہ

$$\frac{\text{جب فہ}}{۱+\text{جب فہ جم و}} = \text{مس فہ}\left\{\frac{۱}{۱+\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{فہ}\times\text{لا}} - \frac{\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{فہ}\times\text{لا}^{-۱}}{۱+\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{فہ}\times\text{لا}^{-۱}}\right\}$$

$$= \text{مس فہ}\left\{۱+۲\sum(-۱)^{\text{ک}}\,\text{جم ک و}\times\text{مس}^{\text{ک}}\,\frac{۱}{۲}\,\text{فہ}\right\}$$

اور اس لیے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \text{جم}^{۲}\text{فہ}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرفہ}}\left[\text{مس فہ}\left\{۱+۲\sum(-۱)^{\text{ک}}\,\text{جم ک و}\times\text{مس}^{\text{ک}}\,\frac{۱}{۲}\,\text{فہ}\right\}\right]$$

$$= ۱+۲\sum(-۱)^{\text{ک}}\,\text{جم ک و}\times\text{مس}^{\text{ک}}\,\frac{۱}{۲}\,\text{فہ}$$

+ ۲ جب فہ جم فہ ∑ (-۱)^ک جم ک و (فی / فی فہ) (مس^ک ½ فہ)

= ۱ + ۲ ∑ (-۱)^ک جم ک و × مس^ک ½ فہ

+ ۲ جب فہ جم فہ ∑ (-۱)^ک جم ک و × مس^ک ½ فہ × ک (۱ + مس² ½ فہ) / (۲ مس ½ فہ)

= ۱ + ۲ ∑ (-۱)^ک جم ک و × مس^ک ½ فہ (۱ + ک جم فہ)

تکمل کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

ط = و + ۲ ∑ (-۱)^ک (مس^ک ½ فہ / ک) (۱ + ک جم فہ) جب ک و

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ ط اور و ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں۔ اس سلسلہ کی پہلی چار رقمیں ہیں　(۱۶۳)

ط = و - ۲ مس ½ فہ (۱ + جم فہ) جب و

+ مس² ½ فہ (۱ + ۲ جم فہ) جب ۲ و

- ⅔ مس³ ½ فہ (۱ + ۳ جم فہ) جب ۳ و

اگر ز کی تین سے اعلیٰ تر قوتیں نظرانداز کی جا سکیں تو

فہ = ز + ⅙ ز³ ، جم فہ = ۱ - ½ ز² اور مس ½ فہ = ½ ز + ⅛ ز³

اور اس لیے حسب سابق حاصل ہوتا ہے

ط = و - ۲ ز جب و + ¾ ز² جب ۲ و - ⅓ ز³ جب ۳ و]

مثال ۱ ۔ یہ دیا گیا ہے کہ

ط = و - ۲ ز جب و + ¾ ز² جب ۲ و - ⅓ ز³ جب ۳ و

جہاں ز ایک چھوٹی مقدار ہے جس کی تین سے اعلیٰ تر سب قوتیں نظر انداز کیگئی ہیں تو سلسلہ کو اُلٹا کر ثابت کرو کہ

$$\text{و} = \text{ط} + \left(2\,\text{ز} - \tfrac{1}{4}\text{ز}^{3}\right)\text{جب ط} + \tfrac{5}{4}\text{ز}^{2}\,\text{جب ۲ط} + \tfrac{13}{12}\text{ز}^{3}\,\text{جب ۳ط}$$

مثال ۲ — ثابت کرو کہ کسی سیارہ کی حرکت کی سمت اور اس کے سمتی نیم قطر کے درمیانی زاویہ کا مماس $\text{ز جب ۶} \big/ \sqrt{1-\text{ز}^{2}}$ ہے۔

مثال ۳ — اگر خروج المرکز جب فہ اکائی کے بہت ہی قریب ہو تو ثابت کرو کہ اوسط بے قاعدگی ط، اصلی بے قاعدگی و کی رقوم میں حسب ذیل ضابطہ کے ذریعہ بیان ہوسکتی ہے

$$\text{ط} = \frac{2\,\text{جم}^{3}\text{فہ}}{(1+\text{جب فہ})^{2}}\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^{3}}{3}\right) - 2\,\frac{1-\text{جب فہ}}{1+\text{جب فہ}}\left\{\frac{\text{لا}^{3}}{3} + \frac{\text{لا}^{5}}{5}\right\}$$

جہاں $\text{لا} = \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\,\text{و}$ ۔

مثال ۴ — مساوات ط = ۶ − ز جب ۶ سے ۶ کو حل کرنے کا حسب ذیل ترسیمی طریقہ ثابت کرو جو جے۔ سی۔ آڈمس[1] نے دیا ہے :—

جیوب کا منحنی ما = جب لا کھینچو۔ مبداء و سے محور لا پر و مر = ط ناپو۔ مر میں سے ایک خط کھینچو جو محور لا سے زاویہ مم^{-1} ز بنائے اور فرض کرو کہ یہ خط منحنی کو نقطہ پ پر قطع کرتا ہے۔ تب پ کا فصلہ ۶ ہے۔

مثال ۵ — مساوات ط = ۶ − ز جب ۶ کے حل کے لیے لیوریر (Leverrier) کا قاعدہ ثابت کرو اگر ز کی تین سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہوں

$$\text{۶} = \text{ط} + \frac{\text{ز جب ط}}{1-\text{ز جم ط}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ز جب ط}}{1-\text{ز جم ط}}\right)^{3}$$

[1] نیز دیکھو راوتھ کی Dynamics of a Particle صفحہ ۲۵۲ اور Monthly Notices, R.A.S. Vol. L, صفحہ ۳۰۱

مثال ۶ — اگر ایک سیارہ کا طول بلد طہَ ہو جو خالی ماسکہ کے گرد ایک اوج سے ناپا گیا ہے تو ثابت کرو کہ

طہَ = ن ت + $\frac{۵}{۴}$ ز^{۲} جب ۲ ن ت

اگر ز کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کیجائیں ۔

(۱۶۴) *** مثال ۷** — اگر ج (طہ)، $\frac{۱}{۲}$ (طہ + جم طہ) کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ مساوات طہ = ع ۔ ز جب ع کو حسب ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے ۔

ط = ج (فہ + ع) ۔ ج (فہ ۔ ع) جہاں ز = جب فہ

نیز بتاؤ کہ ج (طہ) کی قیمتوں کی ایک جدول سے کیپلر کے مسئلہ کو حل کرنے میں کس طرح آسانی پیدا ہوتی ہے ۔

دیکھو مسٹر آلڈس (Aldis) کا مضمون مندرجہ منتھلی نوٹیس آر ۔ اے ایس جلد ~~۶۲~~ صفحہ ۶۳۳ جس میں یہ جدول دی گئی ہے اور اس کے استعمال کی مثالیں درج ہیں ۔

۵۳ — ناقصی حرکت کے وہ ضابطے جو تربیعوں کے ذریعہ بیان کئے گئے ہوں ۔

فرض کرو کہ سیارہ کے حضیض کا طول بلد جسے مدار کے مستوی میں ایک ثابت سمت سے پیمائش کیا گیا ہے حہ ہے اور سیارہ کا طول بلد طہ ہے اور اصلی بے قاعدگی و = (طہ ۔ حہ) ۔ مقدار ب^{۲} \ ا کو ل سے تعبیر کیا گیا ہے اور مدت دوران د ہے ۔

قطع ناقص کے خواص سے سمتی نیم قطر ر کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$ر = \frac{ل}{۱ + ز جم (طہ - حہ)} ، \quad .... (۱)$$

کسی جرم کے لیے جو سورج کے گرد حرکت کرتا ہو حسب دفعہ ۵ حاصل ہوتا ہے

$$ر^{۲} \, ق طہ \backslash ق ت = \sqrt{م ل} \, ، \quad .... (۲)$$

(۲) کو فرت کے لیے حل کرنے، (۱) سے ر کی قیمت درج کرنے، اور تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}} \int_{\text{حہ}}^{\text{طہ}} \frac{\text{فرطہ}}{\{1 + \text{ز جم}(\text{طہ} - \text{حہ})\}^{2}} \text{، } \ldots\ldots \quad (3)$$

جہاں ت وہ وقت ہے جس میں سیارہ حضیض سے اصلی بے قاعدگی و = (طہ ـ حہ) تک ایک مدار پر جس کا خروج المرکز ز اور وتر خاص ل ہے حرکت کرتا ہے۔ مساوات بالا کو متجانس شکل

$$\frac{\text{ت}}{\text{د}} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{2\pi\, \text{ا}^{\frac{3}{2}}} \int_{0}^{\text{و}} \frac{1}{(1 + \text{ز جم و})^{2}}\, \text{فرو}$$

میں بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں ا، د علی الترتیب زمین کا وسط فاصلہ اور مدت دوران ہیں۔

(۱) کو ت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ل ز جب}(\text{طہ} - \text{حہ})}{\{1 + \text{ز جم}(\text{طہ} - \text{حہ})\}^{2}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{ز جب}(\text{طہ} - \text{حہ}) \frac{\text{ر}^{2}}{\text{ل}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$$

$$= \text{ز} \sqrt{\text{مہ}}\ \text{جب}(\text{طہ} - \text{حہ}) / \sqrt{\text{ل}}$$

$$\text{نیز}\quad \text{ر} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \sqrt{\text{مہ}} \{1 + \text{ز جم}(\text{طہ} - \text{حہ})\} / \sqrt{\text{ل}}$$

اور اس لیے سیارہ کی رفتار کے مربع کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right)^{2} + \text{ر}^{2} \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \text{مہ} \{1 + 2\,\text{ز جم}(\text{طہ} - \text{حہ}) + \text{ز}^{2}\} / \text{ل}$$

$$= 2\,\text{مہ} / \text{ر} - \text{مہ} / \text{ا}$$

(۱۶۵)

۱ے متجانس شکل

$$\frac{4\pi^2\,\text{ا}^2}{\text{د}^2}\left(\frac{2}{\text{ر}}-\frac{1}{\text{ا}}\right)$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے جو عمل حساب کے لیے زیادہ سہولت بخش ہے۔

اگر مدار قطع مکافی ہو جیسا کہ وہ مدار ہوتا ہے جس میں دُمدار ستاروں کی بڑی اکثریت گردش کرتی ہے تو اِس صورت میں ز = ۱ اور ا = ∞ اسلیے ضابطے (۱) اور (۳) ہو جاتے ہیں

$$\left.\begin{aligned}\text{ر} &= \tfrac{1}{2}\,\text{ل}\ \text{قط}^2\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}-\text{ح})\\ \text{ت} &= \frac{\text{د}\,\text{ل}^{3/2}}{4\pi\,\text{ا}^{3/2}}\left\{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}-\text{ح})+\tfrac{1}{3}\,\text{مس}^3\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}-\text{ح})\right\}\end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

یہ نتیجہ جس پر ہم پہنچے ہیں یوں بیان کیا جا سکتا ہے:۔ فرض کرو کہ کسی سیارہ (مثلاً زمین) کی مدت دوران اور اوسط فاصلہ علی الترتیب د، ا ہیں۔ اگر ایک دُمدار ستارہ کے مکافی مدار کا وتر خاص ل ہو تو وہ وقت جس میں یہ دُمدار ستارہ حضیض سے اصلی بے قاعدگی و تک گذرتا ہے حسب ذیل ہے

$$\text{د}\,\text{ل}^{3/2}\left(\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{و}+\tfrac{1}{3}\,\text{مس}^3\,\tfrac{1}{2}\,\text{و}\right)\Big\backslash\,4\pi\,\text{ا}^{3/2}$$

یولر کا مسئلہ۔ مکافی حرکت کی ایک مشہور خاصیت یُولر کے مسئلہ میں بیان ہوئی ہے۔ یولر کے مسئلہ کا دعوٰے حسب ذیل ہے۔

اگر کسی دُمدار ستارے کے مکافی مدار پر دو نقطے ج اور جَ لیے جائیں اور سورج سے اِن نقطوں تک سمتی نیم قطر ر اور رَ ہوں اور اگر فاصلہ ج جَ ک ہو تو ج سے جَ تک حرکت کرنے میں دُمدار ستارے کو جو وقت لگیگا وہ

$$\frac{\text{د}}{12\pi}\left\{\left(\frac{\text{ر}+\text{رَ}+\text{ک}}{\text{ا}}\right)^{3/2}-\left(\frac{\text{ر}+\text{رَ}-\text{ک}}{\text{ا}}\right)^{3/2}\right\}$$

ہوگا جہاں د کوکبی سال کا طول ہے اور ذ زمین کا اوسط فاصلہ ہے ۔
اختصار کی خاطر ہم رکھتے ہیں

ق = د ل^۳ \ ۴π ذ^۳/۲ ، لا = مس ½ و ، لاَ = مس ½ وَ ، س = (ر + رَ + ک) \ ۲

تو تَ ـ ت = ق { لاَ ـ لا + ⅓ (لاَ^۳ ـ لا^۳) }

= ⅓ ق (لاَ ـ لا) (۱ + لا^۲ + ۱ + لاَ^۲ + ۱ + لا لاَ)

لیکن قطع مکافی کی خاصیتوں سے

۱ + لا^۲ = ۲ ر \ ل ، ۱ + لاَ^۲ = ۲ رَ \ ل ،

۱ + لا لاَ = قط ½ و قط ½ وَ جم ½ (وَ ـ و) = (۲ √ر رَ \ ل) √(س (س ـ ک) \ ر رَ)

اس لیے

تَ ـ ت = ۲ ق (لاَ ـ لا) (ر + رَ + √(س × س ـ ک)) \ ۳ ل

= ۲ ق (لاَ ـ لا) (س + س ـ ک + √(س × س ـ ک)) \ ۳ ل

(۱۶۶) لیکن چونکہ

(لاَ ـ لا)^۲ = ۱ + لا^۲ + ۱ + لاَ^۲ ـ ۲ (۱ + لا لاَ)

= ۲ { س + س ـ ک ـ ۲ √(س (س ـ ک)) } \ ل

= ۲ { √س ـ √(س ـ ک) }^۲ \ ل

اِس لیے تَ ـ ت = ۲ ق √۲ { س^۳/۲ ـ (س ـ ک)^۳/۲ } \ ۳ ل^۳/۲

= ق { (ر + رَ + ک)^۳/۲ ـ (ر + رَ ـ ک)^۳/۲ } \ ۳ ل^۳/۲

اِس میں ق کی بجائے اِس کی قیمت رکھنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے ۔

* لیمبرٹ کا مسئلہ ۔ یولر کا مسئلہ قطع مکافی میں حرکت سے متعلق ہے ۔

اس کی ایک اہم توسیع اُس عام تر صورت کے لیے جو قطع ناقص میں حرکت سے متعلق ہے لیمبرٹ (Lambert) نے بیان کی ہے جسے حسب ذیل طریقہ پر واضح کیا جا سکتا ہے۔

اگر ایک سیارہ اُس محل سے جہاں سمتی نیم قطر ر ہے اُس محل تک جہاں سمتی نیم قطر رَ ہے حرکت کرنے میں وقت ت لے اور اگر ان دو محلوں کا درمیانی وتر ک ہو تو

$$۲\pi\,\text{ت}/\text{د} = (\text{عا} - \text{جب عا}) - (\text{عاَ} - \text{جب عاَ})$$

جہاں
$$\text{جب}\,\tfrac{1}{۲}\,\text{عا} = \tfrac{1}{۲}\sqrt{\frac{\text{ر} + \text{رَ} + \text{ک}}{\text{ا}}} \quad \text{اور} \quad \text{جب}\,\tfrac{1}{۲}\,\text{عاَ} = \tfrac{1}{۲}\sqrt{\frac{\text{ر} + \text{رَ} - \text{ک}}{\text{ا}}}$$

اور سیارہ کی مدت دوران د ہے۔

چونکہ[1]

$$\text{ر} = \text{ا}(۱ - \text{ز جم ع})،\quad \text{رَ} = \text{ا}(۱ - \text{ز جم عَ})،$$
$$\text{ک}^۲ = \text{ا}^۲(\text{جم ع} - \text{جم عَ})^۲ + \text{ا}^۲(۱ - \text{ز}^۲)(\text{جب ع} - \text{جب عَ})^۲،$$
$$۲\pi\,\text{ت}/\text{د} = \text{ع} - \text{عَ} - \text{ز}(\text{جب ع} - \text{جب عَ})$$
$$= \text{ع} - \text{عَ} - ۲\,\text{ز جب}\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} - \text{عَ})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} + \text{عَ})$$

اس لیے
$$(\text{ر} + \text{رَ})/۲\text{ا} = ۱ - \text{ز جم}\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} + \text{عَ})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} - \text{عَ})،$$
$$\text{ک}^۲/۴\text{ا}^۲ = \text{جب}^۲\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} - \text{عَ})\left\{۱ - \text{ز}^۲\,\text{جم}^۲\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} + \text{عَ})\right\}،$$
$$۲\pi\,\text{ت}/\text{د} = \text{ع} - \text{عَ} - ۲\,\text{ز جم}\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} + \text{عَ})\,\text{جب}\,\tfrac{1}{۲}(\text{ع} - \text{عَ})،$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ا اور اس لیے د معلوم ہوں تو (ر + رَ)، ک، اور ت مقداروں ع − عَ اور ز جم ½(ع + عَ) کے تفاعل ہیں۔

---

[1] ثبوت جو یہاں دیا گیا ہے آڈمس سے منسوب ہے، Collected papers, Vol. I, p. 411
نیز دیکھو راوتھ کی Dynamics of a Particle صفحہ ۲۲۸ —

(۱۶۷)'

اب فرض کرو کہ

$$ع' - ع = ۲\,عہ \quad \text{اور} \quad \tfrac{۱}{۲}(ع + ع') = \text{جم}\; بہ$$

تو $\quad (ر + ر')\backslash ۲\,ا = ۱ - \text{جم}\, عہ\, \text{جم}\, بہ \,،\; ک\backslash ۲\,ا = \text{جب}\, عہ\, \text{جب}\, بہ$

اس لیے $\quad (ر + ر' + ک)\backslash ۲\,ا = ۱ - \text{جم}\,(بہ + عہ)$

$$(ر + ر' - ک)\backslash ۲\,ا = ۱ - \text{جم}\,(بہ - عہ)$$

نیز $\quad ۲\pi\, ت\backslash د = ۲\,عہ - ۲\, \text{جب}\, عہ\, \text{جم}\, بہ$

$$= \{بہ + عہ - \text{جب}(بہ + عہ)\} - \{بہ - عہ - \text{جب}(بہ - عہ)\}$$

اس میں بہ + عہ = عا اور بہ − عہ = عا' رکھنے سے لیمبرٹ کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱ — ثابت کرو کہ ایک ناقصی مدار میں جس کا اوسط فاصلہ ا ہے اوسط بے قاعدگی ط حسب ذیل مختلف طریقوں سے بیان کی جا سکتی ہے:—

$$ط = ۲\pi\, ا_{۰}^{\frac{۳}{۲}}\, ت\backslash ا^{\frac{۳}{۲}}\, د = ۲\pi\, ا_{۰}^{\frac{۳}{۲}}\, (۱ - ز^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\, ت\backslash ل^{\frac{۳}{۲}}\, د = \overline{ہ\,ت}\backslash ا^{\frac{۳}{۲}}$$

جہاں سورج سے زمین کا اوسط فاصلہ $ا_{۰}$ ہے اور کوکبی سال کا طول د ہے۔

مثال ۲ — اگر اوسط بے قاعدگی ط ہو، اصلی بے قاعدگی و، اور خروج المرکز ز تو ثابت کرو کہ

$$\tfrac{۱}{۲}\, ط = (۱ - ز)\left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز}\right)^{\frac{۱}{۲}} \text{مس}\, \tfrac{۱}{۲}\, و - \frac{۱ - ۳\,ز}{۳}\left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز}\right)^{\frac{۳}{۲}} \text{مس}^{۳}\, \tfrac{۱}{۲}\, و$$

$$+ \frac{۱ - ۵\,ز}{۵}\left(\frac{۱ - ز}{۱ + ز}\right)^{\frac{۵}{۲}} \ldots$$

اور اس مساوات کو ذیل کی مساوات میں تبدیل کرو:

$$\frac{\overline{ہ\,ت}}{۲\, ل^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{(۱ + ز)^{۲}} \text{مس}\, \tfrac{۱}{۲}\, و - \frac{۱ - ۳\,ز}{۳\,(۱ + ز)^{۳}} \text{مس}^{۳}\, \tfrac{۱}{۲}\, و$$

$$+ \frac{۱ - ۵\,ز}{۵} \cdot \frac{۱ - ز}{(۱ + ز)^{۴}} \text{مس}^{۵}\, \tfrac{۱}{۲}\, و - \ldots\ldots$$

[Edinburgh Degree Examination, 1907]

ہمیں معلوم ہے

$$\text{ط} = \text{ع} - \text{ز جب ع}$$

$$= ۲ \left\{ \text{مس}^{-۱} \left(\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}\ \text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و} \right) - \text{ز} \frac{\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}\ \text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و}}{۱ + \frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}\ \text{مس}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و}} \right\}$$

$\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}\ \text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و}$ کی بجائے لہ لکھو تو

$$\tfrac{۱}{۲}\text{ط} = \text{مس}^{-۱}\text{لہ} - \text{ز} \frac{\text{لہ}}{۱+\text{لہ}^{۲}}$$

$$= \text{لہ} - \tfrac{۱}{۳}\text{لہ}^{۳} + \tfrac{۱}{۵}\text{لہ}^{۵} - \ldots\ldots - \text{ز لہ}(۱ - \text{لہ}^{۲} + \text{لہ}^{۴} - \text{لہ}^{۶} + \ldots)$$

$$= (۱-\text{ز})\text{لہ} - \frac{۱-۳\text{ز}}{۳}\text{لہ}^{۳} + \frac{۱-۵\text{ز}}{۵}\text{لہ}^{۵} - \ldots\ldots$$

$$= (۱-\text{ز})\left(\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و} - \frac{۱-۳\text{ز}}{۳}\left(\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}\right)^{\frac{۳}{۲}}\text{مس}^{۳}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و}$$

$$+ \frac{۱-۵\text{ز}}{۵}\left(\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}\right)^{\frac{۵}{۲}}\text{مس}^{۵}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و} - \ldots\ldots$$

لیکن $$\text{ن} = \frac{\sqrt{\text{مہ}}}{\text{ا}^{\frac{۳}{۲}}} = (۱-\text{ز}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} \frac{\sqrt{\text{مہ}}}{\text{ل}^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۱۶۸)$$

$\therefore$ $$\text{ط} = (۱-\text{ز}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} \frac{\sqrt{\text{مہ}}}{\text{ل}^{\frac{۳}{۲}}}\ \text{ت}$$

اسلیے $$\frac{\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت}}{۲\ \text{ل}^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{(۱+\text{ز})^{۲}}\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و} - \frac{۱-۳\text{ز}}{۳(۱+\text{ز})^{۲}}\text{مس}^{۳}\ \tfrac{۱}{۲}\text{و}$$

$$+ \frac{1-5\,ز}{5}\ \frac{1-ز}{(1+ز)^2}\ مس^5 \frac{1}{2} و - \ldots\ldots$$

مکافی مدار کے لیے دفعہ ۵۳ کی مساوات (۴) حاصل ہوئی تھی، اس کے جواب میں قطع ناقص یا قطع زائد کے لیے مساوات بالا حاصل ہوئی ہے۔ اگر ابھی ز = ۱ رکھا جائے تو ہمیں صرف یہ مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\sqrt{\mu}\ ت = \frac{1}{2}\ ل^{\frac{3}{2}} \left\{ مس \frac{1}{2} و + \frac{1}{3} مس^3 \frac{1}{2} و \right\}$$

کیونکہ دوسری رقم کے بعد سب رقموں میں (۱-ز) ایک جزو ضربی کے طور پر شامل ہے

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ایک دُمدار ستارہ زمین کے مدار کے اندر جتنا وقت صرف کرتا ہے وہ ایک سال کا $\sqrt{2}(1-ط)^{\frac{1}{2}}(1+2ط)\backslash 3\pi$ حصہ ہے جہاں ط دُمدار ستارے کا حقیقی فاصلہ ہے اور فاصلہ کی اکائی زمین کا شمس مرکزی فاصلہ ہے جسے مستقل سمجھا گیا ہے۔ دُمدار ستارے کے مدار کا ایک قطع مکافی ہونا اور اس کا طریق الشمس کے مستوی میں ہونا تسلیم کر لیا گیا ہے۔

چونکہ ل = ۲ ط اس لیے حضیض سے اصلی بے قاعدگی و تک وقت کے لیے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$ط^{\frac{3}{2}} \left(مس \frac{1}{2} و + \frac{1}{3} مس^3 \frac{1}{2} و \right) \backslash \pi \sqrt{2}$$

نیز

$$ر = ط\ قط^2 \frac{1}{2} و$$

اس لیے جم$^2 \frac{1}{2}$ و = ط سے اُس نقطہ کی اصلی بے قاعدگی متعین ہو گی جہاں دُمدار ستارہ زمین کے مدار کو عبور کرتا ہے۔ اس لیے مس $\frac{1}{2}$ و کی بجائے اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ط^{\frac{3}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1-ط}{ط}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-ط}{ط}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

جو زمین کے مدار سے حضیض تک وقت ہے اور اس وقفہ کا دُگنا سوال کا جواب ہے

اِس جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت ۲\۳π ہے جبکہ ط = $\frac{1}{2}$

* مثال ۴ — دو سیارے ہم مستوی مداروں میں حرکت کر رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب یہ سیارے ایک دوسرے سے قریب ترین ہوتے ہیں تو ان کے طول بلد ول طہ اور طہَ کو حسب ذیل دو مساواتیں پوری کرنی چاہئیں:—

$$ت + ل^{\frac{3}{2}} \int_{حہ}^{طہ} \frac{فر طہ}{(1+ زجم(طہ-حہ))^2} - تَ - لَ^{\frac{3}{2}} \int_{حہَ}^{طہَ} \frac{فر طہَ}{(1+ زجم(طہَ-حہَ))^2} = \cdot$$

اور

$$\frac{ز}{\sqrt{ل}} جب(طہ-حہ)\{ر - رَجم(طہ-طہَ)\} + \frac{زَ}{\sqrt{لَ}} جب(طہَ-حہَ)\{رَ - رجم(طہ-طہَ)\}$$

$$+ جب(طہ-طہَ)\left(\sqrt{ل}\,\frac{رَ}{ر} - \sqrt{لَ}\,\frac{ر}{رَ}\right) = \cdot$$

جہاں ت اور تَ وہ لمحات ہیں جن پر یہ سیارے حضیض میں سے گذرتے ہیں۔

پہلی مساوات سے صرف یہ بیان ہوتا ہے کہ سیارے ایک ہی آن پر طول بلد طہ اور طہَ رکھتے ہیں۔

دوسری مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $ر^2 - ۲ ررَجم(طہ-طہَ) + رَ^2$ کو اقل ہونا چاہیے، اس لیے (۱۶۹)

$$ر\frac{فرر}{فرت} - رَ\frac{فرر}{فرت}جم(طہ-طہَ) - ر\frac{فررَ}{فرت}جم(طہ-طہَ) + رَ\frac{فررَ}{فرت}$$

$$+ ررَجب(طہ-طہَ)\left(\frac{فرطہ}{فرت} - \frac{فرطہَ}{فرت}\right) = \cdot$$

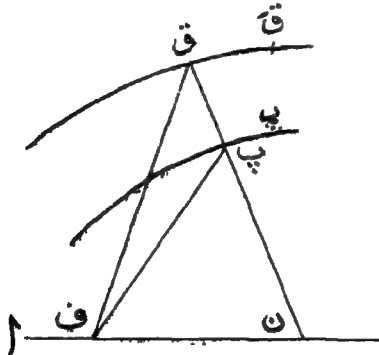
اسمیں $\frac{فرر}{فرت} = \frac{ز}{\sqrt{ل}}جب(طہ-حہ)$، $\frac{فرطہ}{فرت} = \frac{\sqrt{ل}}{ر^2}$ درج کرنے سے دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اگر ز اور زَ دونوں چھوٹے ہوں تو طہ اور طہَ تقریباً مساوی ہیں اور دوسری مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$(ا - اَ)\{ز\sqrt{اَ}\; جب(طہ-حہ) - زَ\sqrt{ا}\; جب(طہ-حہَ)\}$$

+ (ا$^{\frac{3}{2}}$ − ا$^{\frac{3}{2}}$) جب (طہ − طہَ) = ۰

* **مثال ۵** — ثابت کرو کہ زمین سے ایک سیارہ کا فاصلہ جس کا مدار طریق الشمس کے مستوی میں ہے بالعموم اقل نہیں ہوگا جبکہ سیارہ تقابل میں ہو سوائے اُس صورت کے جبکہ زمین اُن دو نقطوں میں سے ایک یا دوسرے پر ہو جو سیارے کے مدار میں ہیں، لیکن اگر سیارہ اور زمین کے مداروں کے حضیضوں کے شمس مرکزی طول بلد ایک ہی ہوں اور ان کے وتر خاص خروج المرکزوں کی نسبت مثناۃ میں ہوں تو محولہ بالا فاصلہ ہر تقابل پر اقل ہوگا۔ [Math. Trip. 1. 1900]

اسے سوال ۴ سے اخذ کیا جا سکتا ہے یا دوسری طرح حسب ذیل طریقہ پر ثابت کیا جا سکتا ہے:—

فرض کرو کہ وقت ت پر ان دو سیاروں کے محل پ، ق (شکل ۵۰) ہیں اور وقت ت + مف ت پر ان کے محل پَ، قَ ہیں۔ اب اگر پ ق اقل یا اعظم ہو تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے پ ق = پَ قَ۔ اس لیے

پ پَ جم پَ پ ن = ق قَ جم ق قَ ن

شکل (۵۰)

فرض کرو زاویہ ا ف پ = طہ، زاویہ ا ف ق = طہَ، زاویہ ا ن پ = سہ، زاویہ ف پ پَ = فہ، ف ق قَ = فہَ، ف پ = ر اور ف ق = رَ تو

پ پَ جم فہ = − فر، پ پَ جب فہ = ر فرطہ

اس لیے

پ پَ جم پَ پ ن = پ پَ جم (فہ − طہ + سہ)

= - فرزجم (طہ - سہ) + رفرطہ جب (طہ - سہ)

= {- زجب (طہ - حہ) جم (طہ - سہ) √ال

+ √ال جب (طہ - سہ) \ ر} ہمہ فرت

= {زجب (حہ - سہ) √ال + جب (طہ - سہ) √ال} ہمہ فرت

اِس لئے اگر پ ق = پَ قَ تو حاصل ہونا چاہئے

زجب (حہ - سہ) √ال + جب (طہ - سہ) √ال = زَجب (حَہ - حہ) √ال

+ جب (طَہ - سہ) √الَ

اگر طہ = طَہ = سہ تو سیارہ تقابل میں ہے اور

زجب (حہ - طہ) √ال = زَجب (حَہ - طہ) √الَ

(۱۷۰) پس طہ کی دو قیمتیں ہیں جن میں ۱۸۰° کا فرق ہے - یہ سوال کا پہلا حصہ ہے

نیز اگر حہ = حَہ اور ز √ال = زَ √الَ تو ہر تقابل پر یہ شرط پوری ہوتی ہے -

مثال ٦ - قطع مکافی کی قوس مرتسم کرنے میں جو وقت لگتا ہے اُس کے لیے یولر کا مسئلہ لیمبرٹ کے مسئلہ سے کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے -

اِس صورت میں بہ اور عہ لا انتہا چھوٹے ہو جائیں گے -

مثال ۷ - سورج راس الحمل میں سے بتاریخ ۲۰ مارچ سنہ ۱۸۹۸ء بوقت ۲ گھنٹے ۵ منٹ گذرا تھا اور راس المیزان میں سے بتاریخ ۲۲ ستمبر سنہ ۱۸۹۸ء بوقت ۱۲ گھنٹے ۳۵ منٹ گذرا تھا - ثابت کرو کہ یہ وقفہ اِن نتیجوں کے مطابق ہے کہ زمین کے مدار کا خروج المرکز تقریباً $\frac{1}{60}$ ہے اور خطِ اوجین خطِ اعتدالین پر تقریباً علی القوائم ہے -

[coll. Exam.]

اگر سورج ایک اعتدالی نقطہ پر ہو اور اگر ز² قابل نظر انداز ہو تو بآسانی یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

جب (حہ + غ) = زجب حہ

پس غ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنے زجب حہ - حہ اور π - حہ - زجب حہ -

اگر ♈ اور ♎ میں سے گذرنے کے اوقات علی الترتیب ت‌₁ اور ت‌₂ ہوں اور حضیض میں سے گذرنے کا وقت ت اور سال کا طول د ہو تو

$$2\pi\,\frac{\text{ت}-\text{ت}_1}{\text{د}} = \text{ز جب ح} - \text{ح} - \text{ز جب}\left(\text{ز جب ح} - \text{ح}\right)'$$

$$2\pi\,\frac{\text{ت}_2-\text{ت}}{\text{د}} = \pi - \text{ح} - \text{ز جب ح} - \text{ز جب}\left(\text{ح} + \text{ز جب ح}\right)$$

اس لیے
$$\text{ت}_2 - \text{ت}_1 = \frac{1}{2}\,\text{د} - \frac{2}{\pi}\,\text{د ز جب ح}$$

اگر ح، ۹۰° کے قریب ہو، $\text{ز} = \frac{1}{60}$ تقریباً اور $\text{د} = 365\frac{1}{4}$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ت}_2 - \text{ت}_1$، نصف سال سے بقدر ۳٫۸ دن کے مختلف ہے۔

مثال ۸۔ یہ تسلیم کر کے کہ زمین کا مدار بلحاظ سورج کے ایک مستوی منحنی ہے ثابت کرو کہ شمسی محددوں عہ، ضہ، عہَ، ضہَ، عہً، ضہً کے تین مشاہدوں کے ہر جٹ کے لیے حسب ذیل مساوات پوری ہوتی ہے:-

مس ضہ جب (عہَ - عہً) + مس ضہَ جب (عہً - عہ) + مس ضہً جب (عہ - عہَ) = ۰

(۱۷۱)

آٹھواں باب

استقبال اور کبو

دفعہ صفحہ

۵۴ — قمرشمسی استقبال کا مُشاہدہ — وہ اہم مظہر جسے ہم اعتدالین کے استقبال کے طور پر جانتے ہیں، بہت آسانی سے واضح ہو جاتا ہے اگر ایک آن پر کسی ثابت ستارہ کے مُشاہدہ کردہ صعود مستقیم اور میل کا مقابلہ ایک دوسری آن پر جو اول الذکر آن سے کافی فصل رکھتی ہو اُسی ستارہ کے مشاہدہ کردہ صعود مستقیم اور میل کے ساتھ کیا جائے۔ مثالاً قطب تارے کے محدد حسب تفصیل ذیل معلوم ہوئے تھے:۔

		گھنٹہ	منٹ	ثانئے
قطب تارہ یکم جنوری ۱۸۵۰ء	ص ـ مہ (صعود مستقیم)	۱	۵	۲۴
	ضہ (مَیل)	+۸۸°	۳۰َ	۴۹ً

اِن کا مقابلہ اسی ستارے کے اُن محددوں سے کرنا ہے جو ۵۰ سال بعد حاصل ہوئے تھے :-

		گھنٹہ	منٹ	ثانئے
قطب تارہ یکم جنوری ۱۹۰۰ء	ص ـ مہ	۱	۲۲	۰
	ضہ	۸۸°	۴۶َ	۵۴ً

ہم دیکھتے ہیں کہ محددوں کے اِن دو جٹوں میں صعود مستقیم کے درمیان پاؤ گھنٹہ سے زیادہ فرق اور مَیل کے درمیان پاؤ درجہ سے زیادہ فرق پایا جاتا ہے - اِن فرقوں پر بڑی توجہ کی ضرورت ہے -

پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ قطب تارے کے ظاہری محل کا یہ تغیر خود اِس کی حقیقی حرکتوں کا نتیجہ ہے - لیکن ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اِس مظہر کی ایسی توجیہ نہیں کی جا سکتی - یہ ہو سکتا ہے کہ کسی نقطہ کے محددوں میں تبدیلیاں اِن محوروں میں تبدیلیوں کی وجہ سے پیدا ہوں جن کے لحاظ سے اِن محددوں کی پیمائش عمل میں آئی ہے یا خود نقطے کے محل میں مطلق تبدیلیوں کا نتیجہ ہوں - ہم ثابت کرینگے کہ ستارے کے مقام میں یہ تبدیلیاں صرف ظاہری ہیں - وہ ستارے کے مقام کی تبدیلیوں سے نہیں بلکہ اُس بڑے دائرے کے مقام کی تبدیلیوں سے منسوب کیجانی چاہئیں جس کے حوالہ سے ستارہ کا مقام متعین کیا جاتا ہے - یہ تبدیلیاں اُن مظاہر کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں جو **استقبال** اور کبو کے طور پر مشہور ہیں - (۱۷۲)

اولاً قطب تارے کے مَیل پر غور کرو جو نصف صدی کے عرصہ میں حسب مشاہدات ۱۶َ ۴ً سے زیادہ بڑھ چکا ہے یا سالانہ ۱۹ً کی اوسط شرح سے اِس کے یہ معنی ہیں کہ قطب اور قطب تارے کا درمیانی فاصلہ سالانہ ۱۹ً کی شرح سے

گھسٹ رہا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قطب' یا قطب تارہ' یا دونوں حرکت میں ہونے چاہئیں۔

لیکن قطب تارے کے قطبی فاصلہ کے اس تغیر کا کوئی قابل قدر حصہ اس ستارے کی ذاتی حرکت (دفعہ ۶۰) سے منسوب نہیں کیا جا سکتا۔ اگر قریب کے ستاروں سے قطب تارے کا فاصلہ ناپا جائے تو اس میں کوئی ایسا تغیر نہیں پایا جاتا جس کا مقابلہ اُس تغیر سے کیا جا سکے جو قطب تارے اور قطب کے درمیانی فاصلہ میں پایا جاتا ہے۔ قطب تارے کی اگر کوئی حقیقی ذاتی حرکت ہے بھی تو وہ اس قدر خفیف ہے کہ وہ اس تارے کے مَیل میں مُشاہدہ کردہ تبدیلیوں کا باعث نہیں ہو سکتی۔ یہ بھی واضح رہے کہ پچاس سال کے عرصہ میں دوسرے ستاروں کے قطبی فاصلوں میں بالعموم بڑا تغیر پایا جاتا ہے لیکن خود ستاروں کے باہمی فاصلوں میں کوئی قابل قدر تبدیلیاں نظر نہیں آتیں۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ قطب تارے اور قطب کے درمیانی فاصلہ میں جو تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں وہ خود قطب تارے کی حرکت سے منسوب نہیں کی جانی چاہئیں بلکہ انہیں قطب سماوی کی حرکت سے منسوب کرنا چاہئے۔ اب ہم اس حرکت کی نوعیت کا مطالعہ کرینگے۔

اگر قطب' کرۂ سماوی پر اپنا محل مسلسل بدلتا ہے تو سماوی خط استواء کی بھی مسلسل حرکت ہونی چاہئے کیونکہ خط استواء پر کا ہر نقطہ بہر حال قطب سے ۹۰° پر ہونا چاہئے۔ چنانچہ خط استواء حرکت کرتا ہے لیکن طریق الشمس کے ساتھ اس کا اوسط میلان مستقل رہتا ہے۔ یہ زاویہ صرف چند ثانیوں کی مقدار میں طریق الشمس کی ایک جانب یا دوسری جانب متزلزل ہوتا ہے۔ وسط گرما میں سورج کا میل طریق الشمس کا میلان ہے اور یہ میلان ۱۸۵۰ء میں بھی وہی تھا اور سنہ ۱۹۱۰ء میں بھی وہی (دیکھو صفحہ ۲۴۴)۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ خط استواء کی حرکت اس طرح ہونی چاہئے کہ وہ طریق الشمس کو جسے ثابت تصور کیا گیا ہے' تقریباً ایک مستقل زاویہ پر قطع کرے اور اعتدالی نقطے طریق الشمس پر زمین کی حرکت کی سمت کے مخالف حرکت کریں۔ طریق الشمس کے قطب کو

(۱۷۳)

کرہ سماوی پر ثابت خیال کیا جا سکتا ہے اور مذکورۂ بالا حرکت کی وجہ سے خط استواء کا قطب طریق الشمس کے قطب کے گرد ایک چھوٹا دائرہ مرتسم کرتا ہے یہ وہ حرکت ہے جو اعتدالین کے قمر شمسی استقبال کے نام سے مشہور ہے۔ اس کا سادہ ترین اظہار کسی ستارہ کے طول بلد میں مسلسل اضافہ کے ذریعہ ہوتا ہے درآنحالیکہ ستارہ کا عرض بلد غیر متبدل رہتا ہے۔ بالعموم قمر شمسی استقبال سے کسی جرم فلکی کے میل اور صعود مستقیم دونوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

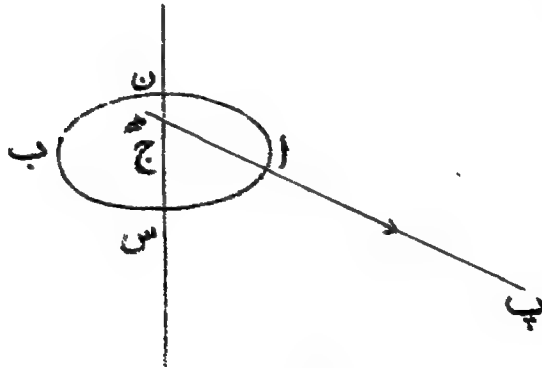
۵۵۔ قمر شمسی استقبال اور کبو کی طبیعی توضیح۔ اُس محور کی سمت میں، جس کے گرد زمین اپنی یومی گردش کرتی ہے، بہت سست تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں اور یہ تبدیلیاں استقبال اور کبو کے مظاہر پیدا کرتی ہیں مستقل سمت سے زمین کے محور کا یہ خلل اس واقعہ کی وجہ سے ہے کہ زمین جیسے ایک کرہ نمائی جسم پر بیرونی جسم (چاند یا سورج) کی کشش کا حاصل زمین کے مرکز ثقل میں سے گذرنے والی ایک واحد قوت نہیں ہے۔

اگر زمین فی الواقعی ایک کروی استوار جسم ہوتی اور اگر ہر اندرونی ہم مرکز کروی خول کی سطح پر کثافت مستقل ہوتی تو کسی بیرونی جسم (جیسے کہ چاند یا سورج) کی کشش ایک قوت کے مماثل ہوتی جو کرہ کے مرکز پر عمل کرتی۔ اگر کسی قوت کا خط عمل اُس جسم کے مرکز ثقل میں سے گذرے جس پر یہ عمل کرتی ہے، تو جسم کی گردش پر جو مرکز ثقل کے گرد ہو ایسی قوت کا کچھ اثر نہ ہوگا۔ لیکن اُن حالات کے تحت جو نظام شمسی میں موجود ہیں نہ سورج کی کشش اور نہ چاند کی کشش زمین کے مرکز ثقل میں سے گذرتی ہے۔ اس لیے زمین کی گردش میں وہ خلل پیدا ہوتے ہیں جن پر اب ہم غور کریں گے۔

اگرچہ اُن وجوہ کی بنا پر جو بعد میں بیان کئے جائیں گے استقبال کے پیدا کرنے میں سورج کی بہ نسبت چاند کا زیادہ حصہ ہے لیکن ہم پہلے سورج

اثر پر غور کرینگے کیونکہ زمین کے لحاظ سے اس کی اضافی حرکت چاند کی حرکت کی بہ نسبت زیادہ سادہ ہے۔

اگر ہم یہ مان لیں کہ زمین ایک گردشی جسم ہے اور خط استواء کے گرد متشاکل ہے تو چونکہ ن س (شکل ۵۰) زمین کا محور ہے اور ج اسکا مرکز اور پ کوئی بیرونی ذرہ اس لیے مستوی ن س پ زمین کو متشاکلاً تقسیم کرتا ہے اور اس لیے زمین پر پ کی حاصل کشش مستوی ن س پ میں واقع ہوتی ہے۔ نیز اگر پ خط استواء کے مستوی میں ہو تو حاصل کشش بھی اس مستوی میں ہوگی۔ اس لیے اگر پ استوائی مستوی ا ب میں واقع ہو تو حاصل کشش ج پ پر ہوگی۔

اگر پ محور ن س میں ہوتا (اس صورت پر غور کرنا ضروری نہیں ہے) تو یہ واضح ہے کہ حاصل کشش ج پ پر ہوگی لیکن پ کے کسی دوسرے مقام کے لیے جیسے کہ شکل ۵۰ میں دکھایا گیا ہے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حاصل کشش ج میں سے نہیں گذرتی بلکہ مستوی ن س پ میں واقع ہونے والے ھ پ کی طرح کے ایک خط پر عمل کرتی۔

شکل (۵۰)

پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ یہ قوت ن س کو ڈھپ کے

عمود دوار سمت میں پھیرنے کا میلان رکھے گی یعنی بالفاظ دیگر چونکہ تجاذبی جسم سورج ہے اس لیے ایسی قوت کا فوری اثر بظاہر یہ معلوم ہوگا کہ وہ زمین کے خط استوا کو طریق الشمس کی جانب ؟ نے پر مجبور کرتی ہے۔ لیکن یہ واقعہ کہ زمین تیزی کے ساتھ گردش کر رہی ہے اس بظاہر متناقض اثر کا باعث ہے کہ محور ن س ہر لحظہ ایک ایسی سمت میں حرکت کرتا ہے جو مستوی ن س پ میں نہیں بلکہ اس پر عمود دوار ہے۔

اس مظہر کی اچھی تمثیل معمولی لٹو سے ملتی ہے اگرچہ اس صورت میں ہم ایک جسم کے (جو فضا میں آزاد ہو) مرکز ثقل کے گرد گردش پر نہیں بلکہ ایک ثابت نقطہ کے گرد گردش پر بحث کر رہے ہیں۔ لیکن علم ریاضی کے نقطہ نظر سے یہ دونوں مسئلے بہت مشابہ ہیں۔ جبکہ لٹو اپنے تشاکل کے محور کے گرد تیز گردش کر رہا ہوتا ہے تو خود یہ محور آہستہ آہستہ انتصابی خط کے گرد ایک مخروط مرتسم کرتا ہے۔ پس لٹو کا یہ محور ہر آن ایک ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہوتا ہے جو اس سمت کے عمود دوار ہوتی ہے جس میں قوت جاذبہ ارض اس کو لانا چاہتی ہے لیکن اس سمت کی طرف جانے سے روکنے والا صرف یہ واقعہ ہے کہ لٹو کی گردش اپنے محور کے گرد خود محور کی مخروطی گردش کی بہ نسبت بہت زیادہ تیز ہے۔ (۱۷۵)

زمین کی یومی حرکت اس کے محور کی مخروطی حرکت کے مقابلہ میں بہت تیز معلوم ہوتی ہے کیونکہ موخر الذکر کا دور تقریباً ۲۶۵۰۰ سال ہے۔ لٹو کے محور کی مخروطی گردش کی تمثیل کو زمین کی گردش کی صورت پر (جبکہ سورج کے لحاظ سے پیدا شدہ خلل زیر غور ہو) استعمال کیا جائے تو ہمیں اس امر کی توقع رکھنی چاہیے کہ ارضی محور ن س طریق الشمس کے مستوی کے عماد کے گرد آہستہ آہستہ ایک قائم مستدیر اسطوانہ مرتسم کرے گا۔

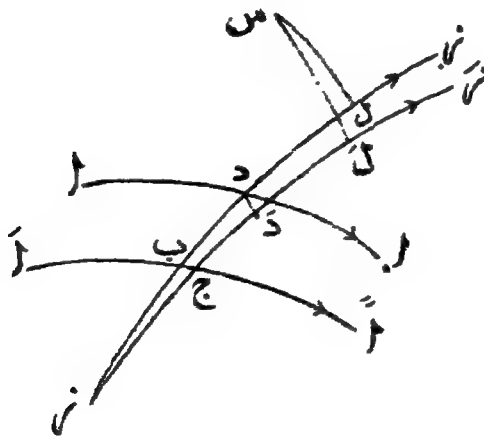
چاند کا استقبالی خلل سورج کی بہ نسبت زیادہ اہم ہے کیونکہ زمین پر چاند کی کل کشش سورج کی کشش کی بہ نسبت بہت ہی کم ہے تاہم چونکہ استقبالی اثر ان کششوں کے درمیانی فرق پر منحصر ہوتا ہے جو زمین کے مختلف حصوں پر خلل ڈالنے والا

جسم عائد کرتا ہے اس لیے چاند کی قربت اس کے استقبالی اثر کو سورج کے اثر کا تقریباً ۲ گنا کر دیتی ہے۔

چاند کے مدار کا مستوی طریق الشمس کے بہت قریب ہے چنانچہ وہ صرف ۵° کا چھوٹا زاویہ طریق الشمس سے بناتا ہے۔ چاند کا مدار اس میلان کو قائم رکھتے ہوئے مسلسل حرکت میں رہتا ہے اور اس کا عقدہ طریق الشمس کا پورا چکر تقریباً ۱۹ سال میں ختم کرتا ہے، صریحاً یہ مدت ۲۶۰۰۰ سال کے استقبالی دور کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہے۔ چونکہ چاند طریق الشمس سے ہمیشہ قریب رہتا ہے اور جتنا اس کے نیچے رہتا ہے اتنا ہی اوپر اور چونکہ اس کے مدار کا اوسط محل طریق الشمس پر منطبق ہوتا ہے اس لیے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ چاند کے استقبالی عمل کا اصل حصہ اسی عام اثر کا مقتضی ہے جو سورج کے عمل کا ہے۔ سورج کا عمل اور چاند کے عمل کا یہ حصہ قمر شمسی استقبال کا باعث ہوتے ہیں جس کی وجہ سے راس الحمل ♈، طریق الشمس پر سالانہ ۵۰¼" کی شرح سے اس سمت میں حرکت کرتا ہے جو بڑھتے طول بلدوں کے مخالف ہے۔ اس مقدار کا تقریباً دو تہائی حصہ چاند کے عمل کی وجہ سے ہے اور باقی سورج کے عمل کی وجہ سے ہے۔ خط استواء کے ساتھ طریق الشمس کا میلان ε، قمر شمسی استقبال کی وجہ سے نہیں بدلتا۔

لیکن چاند کا ایک اہم اثر اس وجہ سے بھی ہے کہ اس کی حرکت اگرچہ طریق الشمس کے قریب ہے لیکن ٹھیک طریق الشمس کے مستوی میں نہیں ہے۔ چاند کے استقبالی عمل کا اقتضا یہ ہے کہ زمین کا محور چاند کے مدار کے قطب کے گرد ایک مخروط مرتسم کرے لیکن خود چاند کا قطب طریق الشمس کے قطب کے گرد ۵° کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اس کا اثر خط استواء کے مستوی پر دوگونہ ہے۔ ایک یہ کہ اس کی باعث راس الحمل ♈، اپنے اوسط مقام کے گرد جس کی تعیین قمر شمسی استقبال کے لحاظ سے کی گئی ہو طریق الشمس پر آگے پیچھے چھوٹے دور کی

ایک اہتزازی حرکت رکھتا ہے ۔ دوسرے یہ کہ سہ بھی اپنی اوسط قیمت کے گرد آگے پیچھے خفیف اہتزاز کرتا ہے ۔ یہ مظاہر کبو کے طور پر معروف ہیں (Nutation.) اور ان کا انکشاف بریڈلے (Bradley.) کے بڑے کارناموں میں سے ایک ہے۔ کبو کے پیدا کرنے میں سورج کا بھی کچھ اثر ہے لیکن وہ چاند کے اثر کے مقابلہ میں بہت قلیل ہے ۔

۵۶ ۔ سیاروی استقبال ۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں قمر شمسی استقبال اور کبو خط استوا اور طریق الشمس کے اضافی محل میں تبدیلی پیدا کرتے ہیں اور اس کی وجہ اول الذکر کی حرکت ہے ۔ اب ہمیں یہ یاد رکھنا چاہئے کہ خود طریق الشمس بالکل ایک ثابت مستوی نہیں ہے اور اس میں تبدیلیاں ہوتی رہتی ہیں اگرچہ یہ تبدیلیاں اس قدر قلیل ہیں کہ ان کو اکثر مقاصد

شکل (۵۸)

کے لیے غیر موجود سمجھا جا سکتا ہے اور طریق الشمس کو بالکل ثابت فرض کیا جا سکتا ہے زمین پر دوسرے سیاروں کی کششوں کی وجہ سے طریق الشمس کی

یہ حرکتیں پیدا ہوتی ہیں۔ اعتدالی نقطوں کے محلوں میں اس طرح جو بے قاعدگی پیدا ہوتی ہے اُس کو سیّاروی استقبال[1] کہتے ہیں کیونکہ اس کا باعث زمین پر سیاروں کی کششیں ہیں۔

ہمیں طریق الشمس کا کوئی معیاری محل لینا چاہیے تاکہ دوسری تاریخوں پر اس کے محل کا حوالہ اس معیاری محل کے ذریعہ دیا جا سکے۔ اس مقصد کے لیے ہم وہ بڑا دائرہ لیتے ہیں جس پر طریق الشمس ۱۸۵۰ء کے آغاز میں منطبق ہوا تھا۔ فرض کرو کہ یہ بڑا دائرہ ن ز نَ بَ ہے (شکل ۵۸)۔ فرض کرو کہ ۱۸۵۰+ت میں طریق الشمس کا محل ن ز نَ آ ہے۔ فرض کرو کہ ۱۸۵۰ء کے آغاز میں خط استوا کا محل ا اَ ہے اور فرض کرو کہ وقت ۱۸۵۰+ت پر خط استوا قمرشمسی استقبال کی وجہ سے اً اً تک حرکت کر چکا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ س سے ن ز ن با اور ن ز نَ اَ پر عمود س ل اور س لَ ڈالے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ ن ز ن با اور ا اً کے نقطہ تقاطع د سے ن ز نَ اَ پر عمود د دَ ڈالا گیا ہے۔ اب ہمیں حسب ذیل مواد ملتا ہے۔

ت سال میں قمرشمسی استقبال ب د ہے۔

۱۸۵۰ء میں اصلی طریق الشمس کا میلان زاویہ دَ ج اً ہے۔

۱۸۵۰+ت میں ثابت طریق الشمس کا میلان زاویہ د ب اً ہے۔

ب ا ج چونکہ خط استوا پر وہ فاصلہ ہے جس میں سے عقدہ ت سال میں طریق الشمس کی حرکت کی وجہ سے منتقل ہو چکا ہے اس لیے وہ سیاروی استقبال ہے اور اس کی مقدار ۱۳ر۰ ت معلوم ہوتی ہے۔

---

[1] سیاروی استقبال کے متعلق اور زیادہ معلومات حاصل کرنے کے لیے نیوکومب (New comb) کی کمپینڈیم آف اسفریکل اسٹرانومی کا مطالعہ کیا جائے جس میں سے یہاں مستعملہ عددی قیمتیں لی گئی ہیں۔

(۱۷۷)

ج دَ کو طول بلد میں **عام استقبال** کہتے ہیں۔ خط استوا اور ظاہری طریق الشمس کے نقطہ تقاطع کا ثانی الذکر پر ہٹاؤ عام استقبال ہے اور اس کا سالانہ اضافہ بتاریخ سنہ ۱۸۵۰+ت حسب ذیل ہے

۵۰٫۲۴۵۳″ + ۰٫۰۰۰۲۲۲۵ ت

اس مقدار کو **استقبال کا مستقل** کہتے ہیں۔ یہ بہت ہی سستی سے بدلتا ہے چنانچہ سنہ ۱۹۰۰ء میں اس کی قیمت ۵۰٫۲۵۶۴″ تھی اور سنہ ۱۹۵۰ء میں ۵۰٫۲۶۷۵ ہوگی۔

آج کل استقبال کے مستقل کو ۵۰٫۲۶″ لینا ہمارے مقاصد کے لیے کافی صحیح ہے۔

سنہ ۱۸۵۰+ت میں استوا اور اسی تاریخ کے طریق الشمس کے درمیان زاویہ (دوری رقموں کو نظر انداز کرکے) حسب ذیل ہے

۲۳° ۲۷′ ۳۲٫۰″ − ۰٫۴۷″ ت

اس کی دوسری رقم کو میلان کی قرنی (Secular) تبدیلی کہتے ہیں۔

شکل میں تیروں کی سمتوں کا مشاہدہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ثابت طریق الشمس پر اصلی طریق الشمس کا نزولی عقدہ نہ ہے اور اس لیے ثابت طریق الشمس پر اصلی طریق الشمس کے صعودی عقدہ کا طول بلد ۱۸۰° - ن ج ہے۔

ستارہ س کا طول بلد جو سنہ ۱۸۵۰ء میں د ل تھا سنہ ۱۸۵۰+ت میں قمرشمسی استقبال کی باعث ب ل ہوجاتا ہے۔ اس کا عرض بلد یعنی س ل قمرشمسی استقبال سے نہیں بدلتا۔

اگر سیاروی استقبال اور قمرشمسی استقبال دونوں کو ملحوظ رکھا جائے تو س کا طول بلد جو سنہ ۱۸۵۰ میں د ل تھا سنہ ۱۸۵۰+ت میں ج لَ ہوجاتا ہے اور اسی طرح عرض بلد س ل سے س لَ تک بدلتا ہے۔

(۱۷۸)

۵۷ - صعود مستقیم اور میل کی رقوم میں استقبال اور کبو کیلئے عام ضابطے -

ہم بالعموم یہ مان لینگے کہ طریق الشمس کا مستوی بغیر متغیر رہتا ہے اور یہ کہ طریق الشمس کے لحاظ سے خط استواء کے محل میں استقبال اور کبو کی باعث شست تبدیلیاں ہوتی ہیں - یہ تبدیلیاں صرف ان طریقوں پر واقع ہوتی ہیں جن کے مطابق کرہ کا ایک بڑا دائرہ بدل سکتا ہے یعنی عقدوں کا خط بدلتا ہے اور طریق الشمس کا میلان بھی بدلتا ہے - اگر ان بڑے دائروں میں جن کے لحاظ سے کسی ستارے کے محدد ناپے جاتے ہیں کوئی تبدیلیاں ہونگی ان تبدیلیوں کی وجہ سے ستارہ کے محددوں میں بھی تبدیلیاں ہوں گی اگرچہ، جیساکہ اب ہم فرض کر رہے ہیں گے، کرہ سماوی پر ستارہ کے مقام میں فی الواقعی کوئی تبدیلی نہ ہو -

خط استواء کے دو محلوں پر غور کرو - فرض کرو کہ پہلا محل طریق الشمس کو ایک اعتدالی نقطہ ♈ پر قطع کرتا ہے اور طریق الشمس کے ساتھ اس کا میلان سہ ہے - فرض کرو کہ دوسرا محل طریق الشمس کو ایک اعتدالی نقطہ ♈ پر قطع کرتا ہے جو طریق الشمس پر گھٹتے والے طول بلدوں کی سمت میں قوس ک میں سے حرکت کر چکا ہے اور میلان سہ سے سہَ تک بدل چکا ہے (شکل ۵۹) -

فرض کرو کہ پہلے خط استواء اور اعتدال کے حوالے سے (نظام اول) ایک ستارہ س کا صعود مستقیم اور میل علی الترتیب ع اور ضہ ہیں اور دوسرے خط استواء اور اعتدال (نظام دوم) کے حوالہ سے اسی ستارے کے محدد عَ اور ضہَ ہیں -

فرض کرو کہ ان دو نظاموں کے حوالہ سے ایک دوسرے ستارے کے متناظر محدد ع، ضہ، اور عَ، ضہَ ہیں -

اب چونکہ قوس س سَ کا طول وہی ہے خواہ محددوں کا کوئی

نظام لیا جائے اس لیے حسب ذیل اساسی مساوات

جب ضہ جب ضہ۱ + جم ضہ جم ضہ۱ جم (عہ − عہ۱)

= جب ضہَ جب ضہَ۱ + جم ضہَ جم ضہَ۱ جم (عہَ − عہَ۱)

حاصل ہوتی ہے جو دفعہ ۱۲ میں استعمال کیجا چکی ہے —

اب ہم اس مساوات پر تین ایسی صورتیں لیکر غور کریں گے جن میں عہ۱، ضہ۱ اور عہَ۱، ضہَ۱ فوراً معلوم ہوتے ہیں اور اس طرح استحالہ کی تین مساواتیں حاصل کریں گے —

اگر دوسرا ستارہ سَ، ۷ پر ہو تو اس کے محدد نظام اول میں حسب ذیل ہیں

عہ۱ = ۰، ضہ۱ = ۰

اسی ستارے کے محدد دوسرے نظام میں مساواتوں :—

جب ضہَ۱ = جب ک جب سہَ،

جم ضہَ۱ جب عہَ۱ = جب ک جم سہَ،

جم ضہَ۱ جم عہَ۱ = جم ک

سے ملتے ہیں —

(۱۷۹) ان قیمتوں کو اساسی مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

جم ضہ جم عہ = جب ک جب سہَ جب ضہَ

\+ جم ک جم ضہَ جم عہَ + جب ک جم سہَ جم ضہَ جب عہَ ..(۱)

اسی طرح سَ کو ۷َ پر لینے سے حاصل ہوتا ہے

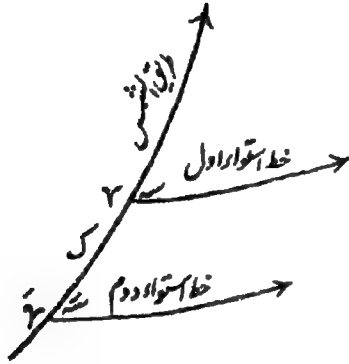
جم ضہَ جم عہَ = − جب ک جب سہ جب ضہ + جم ک جم ضہ جم عہ

− جب ک جم سہ جم ضہ جب عہ ....(۲)

بالآخر فرض کرو کہ یہ دوسرا ستارہ سَ طریق الشمس کے قطب پر ہے تو نظام اول میں اس کے محدد ہیں

عہ۱ = ۲۷۰°، ضہ۱ = ۹۰° − سہ

اور نظام دوم میں

عَہ = ۲۷۰° ، ضَہَ = ۹۰° ۔ سہ

شکل (۵۹)

اساسی مساوات میں ان قیمتوں کو داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

جب ضہ جم سہ ۔ جم ضہ جب سہ جب عہ

= جب ضَہ جم سَہ ۔ جم ضَہ جب سَہ جب عَہ . . (۳)

اس طرح عہ ، ضہ کو عَہ ، ضَہ اور ضروری مستقلات ک ، سہ ، سَہ کے ساتھ ملانے والی تین عام مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ۔

یہ ظاہر ہے کہ مساوات (۳) زبرزدہ اور غیر زبرزدہ حرفوں میں متشاکل ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ (۲) کو (۱) سے کس طرح زبرزدہ اور غیر زبرزدہ حروف کے باہمی تبادلہ اور ک کی علامت بدلنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

اگر معلومہ مقداریں عَہ ، ضَہ ہوں تو (۱) ، (۲) ، (۳) سے ہم جب ضہ اور جم ضہ جب عہ کو عَہ ، ضَہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں اور اس طرح حسب ذیل تین مساواتوں (۴) ، (۱) ، (۵) کو ایک جٹ میں رکھ سکتے ہیں جس سے عہ ، ضہ بغیر ابہام کے معلوم ہو سکتے ہیں :۔ (۱۸۰)

جب ضہ = جب ضَہ (جم ک جب سہ جب سَہ + جم سہ جم سَہ)

- جم ضہَ جم عہَ جب سہ جب ک
+ جم ضہَ جب عہَ (جم ک جب سہ جم سہَ - جم سہ جب سہَ) ..(۴)

جم ضہ جم عہ = جب ضہَ جب ک جب سہَ
+ جم ضہَ جم عہَ جم ک
+ جم ضہَ جب عہَ جب ک جم سہَ ..... (۱)

جم ضہ جب عہ = جب ضہَ (جم ک جم سہ جب سہَ - جب سہ جم سہَ)
- جم ضہَ جم عہَ جم سہ جب ک
+ جم ضہَ جب عہَ (جم ک جم سہ جم سہَ + جب سہ جب سہَ)
.... (۵)

اگر عہ، ضہ دیے گئے ہوں اور عہَ، ضہَ معلوم کرنے ہوں تو اسی طرح حسب ذیل تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :-

جب ضہَ = جب ضہ (جم ک جب سہ جب سہَ + جم سہ جم سہَ)
+ جم ضہ جم عہ جب سہَ جب ک
+ جم ضہ جب عہ (جم ک جب سہَ جم سہ - جم سہَ جب سہ)...(۶)

جم ضہَ جم عہَ = - جب ضہ جب ک جب سہ
+ جم ضہ جم عہ جم ک
- جم ضہ جب عہ جب ک جم سہ .... (۲)

جم ضہَ جب عہَ = جب ضہ (جم ک جم سہَ جب سہ - جب سہَ جم سہ)
+ جم ضہ جم عہ جم سہَ جب ک
+ جم ضہ جب عہ (جم ک جم سہ جم سہَ + جب سہ جب سہَ)
.... (۷)

استقبال محسوب کرنے میں ک کو بالعموم اسقدر چھوٹا سمجھا جا سکتا ہے کہ اسکی پہلی سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کیجا سکتی ہیں اور نیز ہم لیتے ہیں سہ = سہَ اس لیے ضابطے (۶)، (۲)، (۷) ہو جاتے ہیں

جب ضہَ = جب ضہ + ک جب سہ جم ضہ جم عہ،

جم ضہَ جم عہَ = جم ضہ جم عہ ـ ک جب سہ جب ضہ ـ ک جم سہ جم ضہ جب عہ،
جم ضہَ جب عہَ = جم ضہ جب عہ + ک جم سہ جم ضہ جم عہ
اِن سے ہمیں بآسانی حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں
عہَ ـ عہ = ک جم سہ + ک جب سہ مس ضہ جب عہ، ..... (۸)
ضہَ ـ ضہ = ک جب سہ جم عہ، .... (۹)
یہ ضابطے استقبال کے لیے اساسی ضابطے ہیں ۔

مثال ۱ ـ اگر ایک ستارے کا میل اور صعود مستقیم ضہ، عہ ہوں تو ثابت (۱۸۱)
کرو کہ استقبال کی باعث صعود مستقیم میں سالانہ اضافہ قوس کے ثانیوں میں
۴۶ء۳ + ۲۰ء۰ مس ضہ جب عہ کے بہت قریب ہوگا اور میل میں سالانہ اضافہ
۲۰ء۰ جم عہ ہوگا ۔

مثال ۲ ـ خط استواء کے قطب کی زاوئی رفتار طریق الشمس کے قطب کے
گرد ک ہے، طریق الشمس کی گردش کے فوری محور کا طول بلد ل ہے، اور اس کی
زاوئی رفتار عا ہے ـ ثابت کرو کہ حوالہ کے مستویوں کی ان تبدیلیوں سے کسی
ستارے کے صعود مستقیم عہ اور میل ضہ میں تبدیلی کی سالانہ شرحیں

م + ن جب عہ مس ضہ اور ن جم عہ

پیدا ہوتی ہیں جہاں م = ک جم سہ ـ عا جب ل قم سہ
اور ن = ک جب سہ، جہاں سہ طریق الشمس کے ساتھ استواء کا میلان ہے

مثال ۳ ـ ثابت کرو کہ کرۂ سماوی پر کے وہ نقطے جن کے میل ایک
دی ہوئی مدت میں اعتدالوں کے استقبال کی وجہ سے بڑی سے بڑی تبدیلی میں سے
گذرتے ہیں ایک بڑے دائرے کی دو قوسوں پر واقع ہوتے ہیں ـ نیز ثابت کرو کہ
وہ نقطے جن کے میل اس مدت کے اختتام پر غیر متغیر رہتے ہیں ایک دوسرے
بڑے دائرے پر واقع ہوتے ہیں ۔
فرض کرو کہ خط استواء کے قطب اس مدت کی ابتداء اور ختم پر ق، قَ ہیں ـ
تو ہندسی طور پر یہ واضح ہے کہ اس مدت میں استقبال کی باعث میل کی بڑے سے بڑی

ممکن تبدیلی قوس ق قَ کے مساوی ہے اور یہ کہ دو ستارے جو اس تبدیلی میں سے گذرتے ہیں ق قَ میں سے گذرنے والے بڑے دائرے پر واقع ہیں اور قوس ق قَ اور اس کے تحت قدمی قوس کی حدود سے باہر ہیں۔ وہ ستارے جن کے میل اس مدت کے ختم پر غیر متغیر رہتے ہیں اس بڑے دائرہ پر واقع ہیں جو قوس ق قَ کی علی التوائم تنصیف کرتا ہے۔

مثال ۴ — اگر ایک ستارہ دائرہ نقطہ تین پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ وہ میل میں استقبال نہیں رکھتا۔ نیز ثابت کرو کہ دائرہ نقطہ تین پر کے سب نقطے صعود مستقیم و نیز میل میں ایک ہی استقبال رکھتے ہیں۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ اگر س ایک ستارہ ہو جس کے صعود مستقیم میں استقبال نہیں ہے اور خط استوا اور طریق الشمس کے قطب علی الترتیب قَ اور کَ ہوں تو س قَ اور س کَ علی التوائم ہونگے۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ وہ سب ستارے جنکا صعود مستقیم استقبال کی وجہ سے فی الحال نہیں بدلتا ایک ناقص مخروط پر واقع ہوتے ہیں جو خط استوا اور طریق الشمس کے قطبوں میں سے گذرتا ہے۔

شرط ہے (دیکھو (۸))

جم س + جب س مس ضہ جب عہ = ۰

اگر ہم رکھیں

لا = رجم عہ جم ضہ

ئ = رجب عہ جم ضہ

ی = رجب ضہ

اور ر، عہ، ضہ کو ساقط کریں تو مخروط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

لا ی جب س + (لا^۲ + ئ^۲) جم س = ۰

مثال ۷ — ثابت کرو کہ ان سب ستاروں کے لیے جن کے میل میں (خط استوا کے عقدہ کی طریق الشمس میں حرکت کی وجہ سے) تغیر کی شرح اپنی بڑی سے بڑی قیمت ا رکھتی ہے صعود مستقیم میں تغیر کی شرح ا اسی سبب سے ا م س ہے جہاں س طریق الشمس اور خط استوا کا درمیانی زاویہ ہے۔ (۲۳۴)

مثال ۸۔ ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) سے ثابت کرو کہ سہ اور ک کے لحاظ سے عہَ، ضہَ کے تفرقی سروں کے لیے حسب ذیل جملے حاصل ہوتے ہیں:۔

جف ضہَ / جف سہَ = جبِ عہَ، جف عہَ / جف سہَ = ـ مس ضہَ جم عہَ،

جف ضہَ / جف ک = جب سہَ جم عہَ، جف عہَ / جف ک = جم سہَ + جب سہَ مس ضہَ جب عہَ

(۶) کو سہَ کے لحاظ سے تفرق کرنے اور عہ، ضہ، ک، سہ کو مستقل سمجھنے سے مساوات (۷) کی بنا پر حاصل ہوتا ہے

جم ضہَ جف ضہَ / جف سہَ = جم ضہَ جب عہَ،

اس لیے صورت ضہَ = ۹۰° کو خارج کرنے سے

جف ضہَ / جف سہَ = جب عہَ

(۲) کو سہَ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

۰ = جف ضہَ / جف سہَ جب ضہَ جم عہَ + جف عہَ / جف سہَ جم ضہَ جب عہَ

اس لیے جف ضہَ / جف سہَ کی بجائے جب عہَ رکھنے سے

جف عہَ / جف سہَ = ـ مس ضہَ جم عہَ

(۶) کو ک کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

جم ضہَ جف ضہَ / جف ک = جب سہَ (ـ جب ضہ جب ک جب سہ + جم ضہ جم عہ جم ک ـ جم ضہ جب عہ جب ک جم سہ)

= جب سہَ جم ضہَ جم عہَ

اس لیے جف ضہَ / جف ک = جب سہَ جم عہَ

بالآخر (۳) کو ک کے لحاظ سے تفرق کرنے اور جف ضہَ / جف ک کی محصلہ بالا قیمت کو درج کرنے سے

۰ = جم ضہَ جم سہَ جب سہَ جم عہَ + جب ضہَ جب سہَ جب عہَ جب سہَ جم عہَ

− جم ضہَ جب سہَ جم عہَ جف عہَ / جف ک

اس لیے جف عہَ / جف ک = جم سہَ + جب سہَ مس ضہَ جب عہَ

مثال ۹ — ثابت کرو کہ استقبالی حرکت کے باوجود سماوی خط استوا ہمیشہ دو ثابت چھوٹے دائروں کو مس کرتا ہے۔

مثال ۱۰ — اگر میلان میں تبدیلی مف سہ ہو اور ۷ میں کوئی تبدیلی نہ ہو تو ثابت کرو کہ

جم عہ جم ضہ = جم عہَ جم ضہَ

جب عہ جم ضہ = جب عہَ جم ضہَ جم مف سہ − جب ضہَ جب مف سہ

جب ضہ = جب عہَ جم ضہَ جب مف سہ + جب ضہَ جم مف سہ

جہاں عہ، ضہ علی الترتیب ایک ستارہ کے وہ صعود مستقیم اور میل ہیں جو اس تبدیلی سے متاثر ہیں اور عہَ، ضہَ وہ صعود مستقیم اور میل جو اس تبدیلی سے غیر متاثر ہیں۔

مثال ۱۱ — فرض کرو کہ ایک دی ہوئی آن پر ایک ستارہ کا صعود مستقیم اور میل عہ، ضہ ہیں، استقبال کا مستقل ک ہے اور طریق شمس کا میلان سہ ہے۔

اگر جملہ جب سہ جب ضہ + جم سہ جم ضہ جب عہ کو ا سے اور جملہ جم عہ جم ضہ کو ب سے تعبیر کیا جائے تو ت سال بعد اسی ستارے کے لیے ان جملوں کی قیمتیں ہوں گی

ا جم ک ت + ب جب ک ت اور ب جم ک ت − ا جب ک ت

نیز اگر اس مدت میں میل ضہ سے ضہَ ہو جائے تو

جب ضہ − جب ضہَ = جب سہ {(۱ − جم ک ت) − ب جب ک ت}

ہم دیکھتے ہیں کہ جہاں تک استقبال کا تعلق ہے جملہ

(جب سہ جب ضہ + جم سہ جم ضہ جب عہ)^2 + (جم عہ جم ضہ)^2

ایک غیر متغیرہ ہے اور یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہ جملہ ہمیشہ عرض بلد کی جیب التمام کا مربع ہوتا ہے۔ جملہ

جب ضہ جم سہ ـ جم ضہ جب عہ جب سہ

بھی جو عرض بلد کی جیب ہے بلا شبہ ایک غیر متغیرہ ہے اور اس وجہ سے ضابطہ (۳) فوراً لکھ لیا جا سکتا تھا۔

مثال ۱۲ — ثابت کرو کہ استقبال کی باعث ایک ستارہ کا صعود مستقیم جو طریق الشمس کے قطب سے $\frac{1}{2}$ ۲۳° سے زیادہ فاصلہ پر ہو تمام ممکن تبدیلیوں میں سے گذرے گا لیکن اگر ستارہ کا صعود مستقیم طریق الشمس کے قطب سے $\frac{1}{2}$ ۲۳° سے کم فاصلہ پر ہو تو وہ ہمیشہ ۱۲ گھنٹوں سے بڑا ہوگا۔

اگر لا = مس $\frac{1}{2}$ ک تو مساواتوں (۲) اور (۷) سے حاصل ہوتا ہے

لا^2 (۲ جب ضہ جب سہ جم سہ + جم ضہ جب عہ جم ۲ سہ ـ مس عہَ جم ضہ جم عہ)

ـ ۲ لا (جم ضہ جم عہ جم سہ + مس عہَ جب ضہ جب سہ + مس عہَ جم ضہ جب عہ جم سہ)

+ مس عہَ جم ضہ جم عہ ـ جم ضہ جب عہ = ۰

اس دو درجی کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرط باسانی حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

مس^2 عہَ جم^2 بہ + جم^2 سہ ـ جب^2 بہ > ۰

جہاں بہ ستارہ کا عرض بلد ہے۔ اگر بہ < (۹۰° ـ سہ) تو عہَ کی ہر قیمت کے جواب میں ک کی ایک حقیقی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

نیز مثال (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

جب ضہَ جم سہ ـ جم ضہ جب عہَ جب سہ = جب بہ

اگر بہ > (۹۰° ـ سہ) تو جب عہ ہمیشہ منفی ہونا چاہیئے۔

مثال ۱۳ — لا کا محور اعتدال ربیع میں سے گذرتا ہے، ما کا محور خط استواء کے مستوی میں ہے اور محور لا پر عمود ہے، ی کا محور زمین کا قطبی محور ہے

فرض کرو کہ اِن قائم محوروں کے حوالہ سے ایک ستارے کے محدد لا، ما، ی ہیں۔ مان لو کہ طریق الشمس ثابت ہے اور استقبال کو طریق الشمس کے قطب کے گرد خطِ استواء کے قطب کی گردش سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جس کی زاوئی شرح ق ہے فرض کرو کہ ت سال کے وقفہ کے بعد اس ستارہ کے محدد محوروں کے نئے محلوں کے حوالہ سے ضا، عا، طا ہیں۔

ثابت کرو کہ محددوں کے اِن دو جٹوں کے درمیان حسب ذیل روابط ہیں

ضا = لا جم ق ت - ما جم سہ جب ق ت - ی جب سہ جب ق ت،

عا = لا جم سہ جب ق ت + ما (جم² سہ جم ق ت + جب² سہ) + ی جم سہ جب سہ (جم ق ت - ۱)،

طا = لا جب سہ جب ق ت + ما جم سہ جب سہ (جم ق ت - ۱) + ی (جب² سہ جم ق ت + جم² سہ)

جہاں سہ طریق الشمس کا میلان ہے۔

چونکہ لا = جم ضہ جم عہ، ضا = جم ضہَ جم عہَ،

ما = جم ضہ جب عہ، عا = جم ضہَ جب عہَ،

ی = جب ضہ، طا = جب ضہَ

اس لیے ک = ق ت رکھنے اور سہَ = سہ فرض کرنے سے مطلوبہ نتیجے مساواتوں (۲)، (۶)، (۷) سے فوراً حاصل ہوتے ہیں۔ (۱۸۴)

*** مثال ۱۴** — یہ فرض کر کے کہ ایک مدار کا قطب یکساں رفتار سے ایک چھوٹے دائرہ میں حرکت کرتا ہے معلوم کرو کہ کو نسے بڑے دائروں پر عقدوں کی حرکت (۱) یکساں ہے، (۲) مسلسل لیکن متغیر ہے، (۳) اہتزازی ہے، اور ثابت کرو کہ آخری صورت میں عقدہ کی راست حرکت رجعی حرکت کی بہ نسبت زیادہ وقت لیتی ہے۔

فرض کرو کہ سہ (< ۹۰°) اُس دائرہ کا نصف قطر ہے جو متحرک قطب ق، ثابت نقطہ قَ کے گرد مرتسم کرتا ہے تو وہ بڑا دائرہ ج جس کا قطب ق ہے دائرہ جَ کو جس کا قطب قَ ہے مستقل زاویہ سہ پر قطع کرتا ہے۔ عقدہ یکساں طور پر جَ پر حرکت کرتا ہے اور جَ کے سوا کوئی اور بڑا دائرہ نہیں ہے جس پر عقدہ یکساں طور پر حرکت کرتا ہو۔ جَ کے متوازی دو چھوٹے دائرے جَ اور جَ کھینچو جو

ج کی مخالف سمتوں میں ہوں اور اس سے مستقل فاصلہ سہ پر واقع ہوں۔ اب چونکہ ج پر کا کوئی نقطہ ج سے سہ سے زیادہ فاصلہ پر نہیں ہو سکتا اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج پر کے سب نقطے ج$_1$ اور ج$_2$ کے درمیانی منطقہ سے میں واقع ہونے چاہئیں۔ اس لیے کسی دوسرے دائرہ و سے منقطع ہونے والے ج کے تمام ممکن عقدے اس منطقہ سے میں محدود ہیں۔

شکل (۶۰)

دائرہ ج، ج$_1$ اور ج$_2$ کو جن نقطوں پر مس کرتا ہے اپنے متصلہ محل سے اِن نقطوں پر منقطع ہوتا ہے۔ اس لیے اگر وہ عقدہ جس میں دائرہ ج کسی اور دائرہ و کو قطع کرتا ہے مقیم ہو تو یہ عقدہ ج$_1$ یا ج$_2$ پر واقع ہونا چاہیئے۔

اگر وہ عقدہ جس میں ثابت دائرہ و، ج سے منقطع ہوتا ہے مسلسل آگے بڑھے تو اُسے کسی نقطہ پر مقیم نہ ہونا چاہیئے اور اس لیے و کو ج$_1$ اور ج$_2$ کے ساتھ کوئی حقیقی نقاط تقاطع نہیں رکھنے چاہئیں اس لئے اُسکو منطقہ سے کے اندر محدود ہونا چاہیئے۔

اگر و منطقہ سے کے اندر محدود نہیں ہے تو عقدے صرف اہتزاز کر سکتے ہیں کیونکہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں عقدے منطقہ سے کے اندر واقع ہوتے ہیں لہذا یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ و کے اُن حصوں میں داخل نہیں ہو سکتے جو سے کے باہر ہیں اور اس لیے ہر عقدے کو اُن دو قوسوں میں سے ایک میں اہتزاز کرنا چاہیئے جو و پر سے سے منقطع ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ج$_1$ اور ج$_2$ کے ساتھ ج کے نقاط تماس ت اور ت$_1$

ہیں اور فرض کرو کہ و$_1$ اور و$_2$ وہ نقطے ہیں جن میں و کی ایک قوس ج$_1$ اور ج$_2$ میں ختم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ و$_1$ سے و$_2$ تک کھینچی ہوئی قوس اس سمت کے ساتھ ایک حادہ زاویہ بناتی ہے جس میں ج پر واقع شدہ ج کے عقدے حرکت کر رہے ہیں۔ جب ت$_1$ ق$_1$ پر منطبق ہوتا ہے تو اس عقدہ کی راست حرکت و$_1$ و$_2$ پر شروع ہو رہی ہوگی۔ لیکن یہ راست حرکت اس وقت تک ختم نہیں ہوگی جبتک کہ ت$_2$ ق$_2$ پر منطبق نہ ہو جائے اور اس کے لیے ج کو نصف سے زیادہ حصہ میں سے گھمانا پڑے گا یعنی راست ہٹنا ج کے کل دورہ کا نصف سے زیادہ حصہ لیتا ہے۔ لیکن ت$_2$ جب و$_2$ سے گذر جاتا ہے تو تبھی حرکت شروع ہوتی ہے اور یہ اس وقت ختم ہوگی جبکہ ت$_1$ پھر و$_1$ پر پہنچ جائے اور اس لیے مکمل گردش کے نصف سے کم ضرورت ہوں۔ (۱۸۵)

ہم اس مسئلہ کی تحقیق اس طرح بھی کر سکتے ہیں:۔ فرض کرو کہ ف ھ (شکل ۶۰) دائرہ ج ہے، ھ ن دائرہ ج ہے اور ف ن دائرہ و۔ تب مثلث ف ھ ن سے حسب دفعہ ا ضابطہ (۶) حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم عہ جب ک} + \text{جب عہ جم ک جم سہ} - \text{جب عہ جم سَہ جب سہ} = 0 \quad (1)$$

عہ اور ک کی متناظر تبدیلیاں معلوم کرنے کے لیے ہم سہ و سَہ کو مستقل سمجھ کر تفرق کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مف عہ}}{\text{مف ک}} = \frac{\text{جم عہ جم ک} - \text{جب عہ جب ک جم سہ}}{\text{جب عہ جب ک} - \text{جم عہ جم ک جم سہ} + \text{جم عہ جم سَہ جب سہ}}$$

اگر ن ایک مقیم عقدہ ہو تو جم عہ جم ک − جب عہ جب ک جم سہ = ۰ یعنی ھ ن = ۹۰° جس کے یہ معنی ہیں کہ ش ن سے ف ھ پر عمود ہے جو فی الحقیقت وہی شرط ہے کہ ن ج پر واقع ہونا چاہیے۔ پس ہم معلوم کرتے ہیں کہ جم ک = مس سَہ مم سہ اور اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ھ ایک قوس ۲ سہ پر حرکت کرتا ہے اور اس اثنا میں عقدہ ج$_2$ پر کے مقیم عقدے نَ سے ن تک رجعت کرتا ہے۔ شکل میں جو صورت تعبیر کی گئی ہے اس میں

چونکہ مس ؎ م سہ مثبت ہے اس لیے ک < ۹۰° یعنی ۲ ک نصف محیط سے کم ہے، اس لیے اہتزازی حرکت میں عقدوں کی رجعی حرکت راست حرکت کی بہ نسبت کم وقت لیتی ہے۔

* مثال ۱۵ — وہ وقفہ جو ایک دئے ہوئے نصف النہار پر ایک ہی ستارے کے دو متصل مروروں کے درمیان ہوتا ہے استقبال کی وجہ سے ایک اوسط کوبی یوم سے مختلف ہوگا۔ اگر ستارہ کا عرض التمام قطب کے عرض التمام سے کم ہو تو ثابت کرو کہ یہ فرق معدوم ہوگا جبکہ قطب اور ستارہ کے طول بلدوں کا

فرق جم^۱ $\frac{\text{مس (ستارہ کا عرض التمام)}}{\text{مس (قطب کا عرض التمام)}}$ ہو۔

* مثال ۱۶ — اگر ایک دوہرے تارے کے چھوٹے جزو ترکیبی کا زاویہ محل لمحہ ت بہ م۔ ہو تو ثابت کرو کہ اگر صرف استقبال کا اثر ملحوظ رکھا جائے تو کسی دوسرے لمحہ ت پر زاویہ محل م مساوات

$$م = م. + ۰٫۰۰۵۵۷۲ (ت - ت.) جب عہ قط ضہ$$

سے حاصل ہوگا جہاں اس زوج کے صدر تارے کا صعود مستقیم اور میل عہ، ضہ ہیں اور ت اور ت. کو سالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

۵۸ — راس الحمل کی حرکت طریق الشمس پر۔

استقبال اور کبو کی وجہ سے خط استوا اور طریق الشمس کا نقطہ تقاطع جسے ہم راس الحمل (♈) کہتے ہیں طریق الشمس پر (جسے ثابت فرض کر لیا گیا ہے) متحرک ہوتا ہے۔ اس لیے اس کا محل وقت کا ایک تفاعل ہے اور اگر طریق الشمس پر کے کسی ثابت نقطہ و سے ♈ کا فاصلہ ص ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$ص = ا + ب ت + د$$

اس مساوات میں ت وہ وقت ہے جو کسی مستقل آن سے شمار کیا گیا ہے اور ا اور ب مستقل ہیں اور د میں صرف دوری رقمیں شامل ہیں۔ (۱۸۶)

اِن رقموں میں ت زاویوں کے جملوں میں آتا ہے جو د میں صرف اِن کی جیوب اور جیوب التمام کے ذریعہ داخل ہوتے ہیں۔ اِس طرح مقداروں ب ت اور د کے درمیان ایک بنیادی فرق ہے چنانچہ اول الذکر مقدار وقت کی نسبت سے غیر محدود اضافے کی قابلیت رکھتی ہے اور انکیں ب دراصل استقبال کا مستقل ہے۔ برخلاف اِس کے د کی قیمت حدود کے درمیان مقید ہے چنانچہ وہ کسی خاص مقدار + د. سے بڑی نہیں ہوسکتی اور نہ - د. سے کم ہوسکتی ہے جہاں د. ایک محدود مقدار ہے۔ مقدار د وہ کپو ہے جس میں سے ص اس یکساں طور پر متحرک محل کے گرد اہتزاز ہے جو وہ کپو کے موجود نہ ہونے کی صورت میں اختیار کرتا۔

فرض کرو کہ ن ایک نقطہ ہے جو طریق الشمس پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور نقطہ ♈ سے اس کا فاصلہ وقت ت پر ا + ب ت سے تعبیر ہوتا ہے۔ ♈ بعض اوقات ن سے آگے ہوگا اور بعض اوقات اس کے پیچھے لیکن فاصلہ ♈ ن ہرگز د. سے تجاوز نہیں ہوسکتا۔ ♈ کی حرکت بالاوسط وہی ہوگی جو ن کی ہے اور اس لیے ن کو اعتدال ربیع کا اوسط نقطہ سمجھا جاسکتا ہے جو طریق الشمس پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور جس کے عین قرب میں راس الحمل ہمیشہ پایا جاتا ہے۔

چونکہ کسی ستارے کے طول بلد کو طریق الشمس پر ♈ سے پیمائش کرتے ہیں اس لیے یہ ظاہر ہے کہ یہ طول بلد ♈ کی حرکت کی وجہ سے بالعموم بڑھتے رہنا چاہیئے اگرچہ خود ستارہ ذاتی حرکت سے محروم ہو۔ مندرجہ رقموں کی عددی قیمتیں[1] داخل کرنے سے طریق الشمس پر کسی ستارے کے اصلی طول بلد لہ کے لئے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے:-

---

[1] علماء ہیئت کی ایک کانفرنس نے جو بمقام پیرس بماہ مئی ۱۸۹۶ء منعقد ہوئی تھی اس جملہ کے سروں کی مندرجہ قیمتیں اختیار کی تھیں اور اب تک یہ بحری جنتری میں استعمال کی جاتی ہیں۔

لہ = لہ + ۲۶ ء ۵۰ ث ت - ۲۳۵ ء ۱۷ آجیب چ - ۲۷ ء ۰ آجیب ۲ ل

جہاں

لہ ن کے حوالہ سے شروع سال پر ستارہ کا طول بلد ہے،
ت، سال کی وہ کسر ہے جو زیر بحث وقت تک گذر چکی ہے،
چ، چاند کے صعودی عقدہ کا ارض مرکزی طول بلد ہے،
ل، سورج کا اوسط طول بلد ہے جو ہمارے موجودہ مقصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ سورج کا اصلی ارض مرکزی طول بلد سمجھا جا سکتا ہے۔

(۱۸۷) لہ کے اس جملہ میں دوسری رقم استقبال کی وجہ سے ہے۔ یہ رقم ستارے کے طول بلد میں سالانہ اضافہ ۲۶ ء ۵۰ گ کے جواب میں ہے۔ چونکہ اس رقم میں ت بطور ایک جزو ضربی کے شامل ہے اس لیے وہ غیر محدود اضافہ قبول کرنے کی اہلیت رکھتی ہے اور اس لیے وہ لہ کے جملہ کی تین متغیر رقموں میں سے زیادہ اہم ہو سکتی ہے۔

تیسری رقم میں چ آتا ہے جو چاند کے صعودی عقدہ (طریق الشمس پر) کا طول بلد ہے۔ اس رقم سے راس الحمل کا طول بلد (+ ۲۳۵ ء ۱۷ آ) سے (- ۲۳۵ ء ۱۷ آ) تک اپنی اوسط قیمت کے کسی ایک جانب متغیر ہو سکتا ہے۔ چونکہ عقدے طریق الشمس کے گرد تقریباً ۱۸½ سال میں گردش کر لیتے ہیں اس لیے کبو اس امر کا باعث ہوتا ہے کہ ۷ اپنے اوسط مقام سے تقریباً ۹ سال تک آگے رہتا ہے اور پھر تقریباً ۹ سال تک اپنے اوسط مقام سے پیچھے۔ لہ کے جملہ کی آخری رقم سورج کی باعث طول بلد میں کبو ہے، اسے ل کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے جو سورج کا اوسط طول بلد ہے، اس رقم کا دور تقریباً چھ ماہ ہے۔

طول بلد پر اثر رکھنے کے ماسوا کبو طریق الشمس کے میلان پر دوری اثر بھی رکھتا ہے، اس لیے کسی دئے ہوئے وقت پر اصلی میلان معلوم کرنے کے لیے شروع سال کے اوسط میلان میں ۲۱ ء ۹ گ جم چ + ۵۵ ء ۰ گ جم ۲ ل کا اضافہ کرنا چاہئے۔ یہاں یہ یاد دلانا ضروری ہے کہ سیاروی استقبال

(دفعہ ۵۶) کی وجہ سے بھی طریق الشمس کے میلان میں ایک اور خفیف تغیر ہوتا ہے۔ میلان کے تغیر کی مجموعی مقدار جو ان اسباب سے پیدا ہوتی ہے ایک تخفیف ہے جس کی شرح سالانہ ۴۶۸ء۰″ ہے۔
کبو کے (چھوٹی رقموں کو ترک کرکے) اور سیاروں استقبال کے مجموعی اثر کی وجہ سے طریق الشمس کے میلان[۱] کے لیے حسب ذیل جملہ تاریخ ت کے لیے حاصل ہوتا ہے:۔

۲۳° ۲۷′ ۵۸ء۳″ − ۴۶۸ء۰″ (ت − ۱۹۱۰)
+ ۲۱ء۹″ جم ج + ۵۵ء۰″ جم ۲ ل

اِس جملہ کی آخری دو رقموں سے کبو کافی صحت کے ساتھ تعبیر ہوتا ہے۔
یہ پورا جملہ ایفیمرس (Ephemeris.) میں دیا گیا ہے۔ (دیکھو مثال ۵)

مثال ۱۔ استقبال کے مستقل کی نیوکمب کی قیمت (جو بجری جنتری میں استعمال کی گئی ہے) یہ ہے
۵۰ء۲۴۵۳″ + ۰ء۰۰۲۲۲۵″ ت
جہاں ت کا ۱۸۵۰ء سے سالوں میں وقفہ ہے۔
ثابت کرو کہ اِس سے ۱۹۰۹ء میں استقبال کا مستقل ۵۰ء۲۵۸۴″ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر طول بلدوں کا مبداء ۱۹۰۸ء میں اوسط اعتدالی نقطہ کا محل ہو تو بتاریخ ۲۹، جون ۱۹۰۸ء راس الحمل کا طول بلد اور طریق الشمس کا میلان معلوم کرو، یہ دیا گیا ہے کہ ج = ۹۴ء۱۹° ل = ۹۰° اور ت = ۴۹۳ء۰ ۔ (۱۸۸)

[۱] نیوکمب نے ۱۷۵۰ء سے ۲۱۰۰ء تک آٹھ متساوی الفصل زمانوں کے لیے اوسط میلان کی حسب ذیل قیمتیں دی ہیں، اسفریکل اسٹرانومی صفحہ ۲۳۸۔
۱۷۵۰ء ۲۳° ۲۸′ ۱۸ء۵۱″ ۱۹۰۰ء ۲۳° ۲۷′ ۸ء۲۶″ ۲۰۵۰ء ۲۳° ۲۵′ ۵۷ء۹۹″
۱۸۰۰ء ۲۳ ۲۷ ۵۵ء۱۰ ۱۹۵۰ء ۲۳ ۲۶ ۴۴ء۸۴ ۲۱۰۰ء ۲۳ ۲۵ ۳۲ء۵۶″
۱۸۵۰ء ۲۳ ۲۷ ۳۰ء۶۸ ۲۰۰۰ء ۲۳ ۲۶ ۲۱ء۴۱

اِس وقفہ میں طول بلد میں استقبال ۸ء۲۴ً ہے اور کبو کی رقمیں علی الترتیب - ۱ء۷۱ً اور + ۳ء۱۳ً ہیں اس لیے جواب ۰ء۸ً ہے ـ اسی طرح میلان ۲۳° ۲۷َ ۲ء۹۶ً حاصل ہوتا ہے ـ

مثال ۳ ـ ثابت کرو کہ آغاز سال ۱۹۰۹ء سے طول بلد میں استقبال بتاریخ ۷ نومبر ۱۹۰۹ء ۲۱ء۷۴ً ہے اور کبو - ۳ء۱۷ً ہے یہ دیا گیا ہے کہ ل = ۲۲۶ء۱۱° اور چ = ۶۸ء۷°

مثال ۴ ـ اگر سنہ ۱۹۰۹ء میں طریق الشمس کے میلان کی اوسط قیمت ۲۳° ۲۷َ ۴ء۰۴ً ہو تو ثابت کرو کہ بتاریخ ۱۰ جون ۱۹۰۹ء اس کی ظاہری قیمت ۲۳° ۲۷َ ۴۸ء۵ً ہوگی جبکہ چ = ۶ء۱۶°۷ اور ل = ۷۸ء۲° ـ

* **مثال ۵** ـ اگر طریق الشمس کے میلان کے کبو مف سہ کو زیادہ مکمل جملہ (بحری جنتری ۱۹۱۰ء صفحہ ۵)

مف سہ = + ۹ء۲۱۰ً جم چ - ۰ء۰۹۰ً جم ۲چ + ۰ء۵۵۱ً جم ۲ل
- ۰ء۰۰۹ً جم (ل - ۲۸۲ء۶°) + ۰ء۰۲۲ً جم (۳ل + ۲۸۲ء۶°)

سے محسوب کیا جائے تو ثابت کرو کہ بتاریخ یکم مئی ۱۹۰۹ء میلان کا کبو + ۹۷ء۱ً ہے جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد چ = ۷۸ء۱° اور سورج کا اوسط طول بلد ل = ۳۸ء۸° ـ

* **مثال ۶** ـ اگر طول بلد کے کبو مف ل کو زیادہ مکمل جملہ

مف ل = - ۱۷ء۲۳۵ً جب چ + ۰ء۲۰۹ً جب ۲چ - ۱ء۲۷۰ً جب ۲ل
+ ۰ء۱۰۷ً جب (ل + ۳۴ء۳°) - ۰ء۰۵۰ً جب (۳ل + ۲۸۶ء۷°)

سے محسوب کیا جائے تو ثابت کرو کہ بتاریخ ۲۷ دسمبر ۱۹۰۹ء اِس کی قیمت - ۱۵ء۳۷ً ہے، یہ دیا گیا ہے کہ چ = ۶۶ء۰۰° اور ل = ۲۷۵ء۳۳° ـ

* **۵۹ ـ غیر تابع یومی اعداد** ـ اگر کسی ستارے کی کوئی ذاتی حرکت نہ بھی ہو جیسا کہ ہم فی الحال فرض کریں گے تو بھی اس کے محدد استقبال اور کبو کی باعث مسلسل بدلتے رہنے چاہئیں ـ اب ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ طریق الشمس

ایک ثابت دائرہ ہے اور اوسط اعتدالی نقطہ طریق الشمس پر یکساں حرکت
کرتا ہے اور اس لیے اس کا اوسط فاصلہ راس الحمل کے نقطہ سے صفر ہے۔
اور خط استواء تاریخ ت پر طریق الشمس کو اوسط اعتدالی نقطہ پر قطع
کرتا ہے اور حسب تشریح بالا طریق الشمس کے ساتھ زاویہ

۲۳° ۲۷َ ۵۸ء۳ً – ۴۶۸ء۰ً (ت – ۱۹۱۰)

کا میلان رکھتا ہے۔

کسی ستارہ کے اوسط صعود مستقیم اور میل سے اس ستارہ کا وہ صعود مستقیم
(۱۸۹) اور میل سمجھا جائے گا جو آغاز سال پر اوسط خط استواء کے حوالہ سے لئے گئے
ہیں۔ اب ہمارے سامنے مسئلہ ہے کہ کسی خاص دن کسی ستارہ کے ظاہری
محدد عہَ، ضہَ کیا ہیں جبکہ اس کے محدد عہ اور ضہ اس سال کے لئے دئے
گئے ہوں جس میں یہ دن آتا ہے۔

مطلوبہ مساواتیں دفعہ ۷۵ کے عام ضابطوں (۶)، (۲)، (۷) سے
حاصل ہوں گی اور موجودہ مقصد کے لیے ک اور سہَ – سہ چھوٹی مقداریں
سمجھی جاسکتی ہیں جن کے مربع یا حاصل ضرب نظرانداز کئے جاسکتے ہیں۔
ان حالات کے تحت محولۂ بالا مساواتیں، مساواتوں

جب ضہَ = جب ضہ + جب ک جب سہ جم ضہ جم عہ + جب (سہَ – سہ) جم ضہ جب عہ،
جم ضہَ جم عہَ = جم ضہ جم عہ – جب ک جب سہ جب ضہ – جب ک جم سہ جم ضہ جب عہ،
جم ضہَ جب عہَ = جم ضہ جب عہ + جب ک جم سہ جم ضہ جم عہ – جب (سہَ – سہ) جب ضہ
میں تحویل ہوتی ہیں، اور ان سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

جم ضہ جب (عہَ – عہ) = جب ک (جم سہ جم ضہ + جب سہ جب ضہ جب عہ)
– جب (سہَ – سہ) جب ضہ جم عہ،

۲ جب ½ (ضہَ – ضہ) = جب ک جب سہ جم عہ + جب (سہَ – سہ) جب عہ
پس اگر عہَ – عہ کو وقت کے ثانیوں میں اور ضہَ – ضہ، ک اور سہَ – سہ

کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا جائے تو

عَہَ - عہ = ۱/۱۵ ک جم سہ + ۱/۱۵ {ک جب سہ جب عہ - (سَہَ - سہ) جم عہ} سس ضہ ⎫
ضَہَ - ضہ = ک جب سہ جم عہ + (سَہَ - سہ) جب عہ ⎬ ...(۱)

اب ہم تین نئی مقداریں ف، گ، گَ ایسی لیتے ہیں کہ

ف = ۱/۱۵ ک جم سہ، گَ جم گ = ک جب سہ، گَ جب گ = - (سَہَ - سہ) ......(۲)

تو مساواتیں (۱) ہو جاتی ہیں

عَہَ - عہ = ف + ۱/۱۵ گَ جب (گ + عہ) سس ضہ ⎫
ضَہَ - ضہ = گَ جم (گ + عہ) ⎬ ....(۳)

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ ف، گ، گَ ستارہ کے محددوں پر منحصر نہیں ہیں، وہ صرف سال کے دن پر منحصر ہوتے ہیں اور اس کے ساتھ بدلتے ہیں، ہم ان کو **غیر تابع یومی اعداد** کہینگے۔

کسی ستارہ کے محددوں پر استقبال اور کبو کے اثرات محسوب کرنیمیں آسانی پیدا کرنے کے لیے الفیمرس میں جدولیں دیجاتی ہیں جن میں سال کے ہر دن کے جواب میں غیر تابع یومی اعداد کی قیمتیں درج کی ہوئی ہوتی ہیں۔ ہر سال الفیمرس میں صحیح ضابطے دئے جاتے ہیں (مثلاً دیکھو بحری جنتری سنہ ۱۹۱۰ع صفحہ ۲۳۳) جن سے یومی اعداد ف، گ، گَ محسوب کئے جا سکتے ہیں، نیز ان سے دیگر یومی اعداد بھی جن کا حوالہ ابتک ہم نے نہیں دیا ہے معلوم ہو سکتے ہیں۔ فی الحال (۱۹۰)
جس حد تک ہمیں واسطہ ہے حسب ذیل تقریبی مساواتیں کافی ہونگی

ف = ۱/۱۵ جم سہ (۲۶؍۵۰ ً ت - ۱۲؍۱۷ ً جب چ - ۳؍۱ ً جب ۲ ل)
= ۳؍۰۷۳ ث (ت - ۳۴۲؍۰ جب چ - ۰۲۵؍۰ جب ۲ ل)
گَ جم گ = جب سہ (۲۶؍۵۰ ً ت - ۱۲؍۱۷ ً جب چ - ۳؍۱ ً جب ۲ ل) ...(۴)
= ۲؍۰۵ ً (ت - ۳۴۲؍۰ جب چ - ۰۲۵؍۰ جب ۲ ل)
گَ جب گ = - ۹؍۲ ً جم چ - ۶؍۰ ً جم ۲ ل

اِن مساواتوں میں ل سورج کا اوسط طول بلد ہے اور ج خط اُستوا، پر چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد ہے (دیکھو صفحہ ۲۸۷) —
وقت ت سال کا وہ کسری حصہ ہے جو آغاز سال سے زیر بحث وقت تک گذر چکا ہے[1] —

صعود مستقیم اور میل کے سالانہ استقبال کو راست ضابطوں (۳) کی مدد سے ف اگ، گ کی بجائے وہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو ضابطوں (۴) سے حاصل ہوتی ہیں اگر ہم اُن رقموں کو خارج کر دیں جو کبو کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں — چنانچہ (۳) میں ہم ف کی بجائے ۳٫۰۷۳ ثانیہ ت ک کی بجائے ۲۰٫۰۵ ت اور گ کی بجائے صفر درج کرتے ہیں اور اس طرح ستارہ عہ، ضہ کے لیے ہمیں معلوم ہوتا ہے (حسب مثال ۱ دفعہ ۵۷) کہ

(۴)..... {
صعود مستقیم میں ایک سال کا استقبال، عہ کو
عہ + ۳٫۰۷۳ ثانیہ + ۱٫۳۳۶ ثانیہ جب عہ مس ضہ
میں تبدیل کرتا ہے
میل میں ایک سال کا استقبال، ضہ کو
ضہ + ۲۰٫۰۵″ جم عہ
میں تبدیل کرتا ہے
}

اب ہم استقبال اور کبو کے عام مسئلہ کو حل کر سکتے ہیں، یہ مسئلہ حسب ذیل ہے۔
اگر سال ت. کے آغاز پر ایک ستارہ کا صعود مستقیم اور میل

---

[1] یہ یاد رہے کہ جب زیادہ سے زیادہ صحت مطلوب ہوتی ہے تو سال کی ابتدا اُس لمحہ پر لیتے ہیں جبکہ سورج کا اوسط طول بلد ٹھیک ۲۸۰° ہو — سال ۱۹۱۰ء میں یہ طول بلد یکم جنوری کی صبح کے ۵ گھنٹے ۴۰ منٹ پر یعنے جنوری ۰٫۲۳۵ دن پر ہے — ۱۹۰۰ء اور ۲۰۰۰ء کے درمیان ہر اُستوائی سال کی ابتدا کے گرینوچ اوسط وقت کو معلوم کرنے کے لیے نیوکومب کی اسفیریکل اسٹرانومی کا ضمیمہ صفحہ ۴۰۳ دیکھو جہاں اور دوسری کارآمد جدولیں بھی دی گئی ہیں —

عہ۱، ضہ۱ دیے گئے ہوں تو سال ت۱ کے کسی دن اسی ستارہ کا ظاہری صعود مستقیم اور میل عہ۱، ضہ۱ معلوم کرو جہاں تک کہ استقبال اور کبو کا تعلق ہے۔

پہلے اس ستارہ کے وہ محدد معلوم کرنے چاہئیں جو سال ت۱ (> ت۲) میں یکم جنوری کو اوسط خط استواء کے حوالے سے تھے۔ یہ محدد دیے ہوئے اوسط صعود مستقیم اور میل میں حسب ذیل استقبالات جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں :-

صعود مستقیم میں استقبال (۳٫۰۷۳ ث + ۱٫۳۳۶ ث جب عہ۲ مس ضہ۲) (ت۱ - ت۲) (۹۱ء)

میل میں استقبال (۲۰٫۰۵″ جم عہ۲) (ت۱ - ت۲)

اس طرح سال ت۱ میں بتاریخ یکم جنوری اوسط مقام معلوم کرنیکے بعد اِس سال کی الفیمرس سے ف۱، گ۱، گ۱ کی قیمتیں اُس مخصوص دن کے لیے جس کے لیے عہ۱، ضہ۱ مطلوب ہیں معلوم کی جاتی ہیں اور ضابطوں (۳) کو استعمال کیا جاتا ہے تو حاصل ہوتا ہے

عہ۱ = عہ۲ + (۳٫۰۷۳ ث + ۱٫۳۳۶ ث جب عہ۲ مس ضہ۲) (ت۱ - ت۲)
+ ف۱ + ۱/۱۵ گ۱ جب (گ۱ + عہ۲) مس ضہ۲ ...(۷)

ضہ۱ = ضہ۲ + ۲۰٫۰۵″ جم عہ۲ (ت۱ - ت۲) + گ۱ جم (گ۱ + عہ۲)

اِن ضابطوں کے اطلاق کی مثال حسب ذیل ہے۔ فرض کرو کہ گرینوچ پر جوزا (بہ) (Geminorum) کا ظاہری صعود مستقیم اور میل بتاریخ ۲، نومبر ۱۹۱۰ء بوقت اوسط نیم شب محسوب کرنا مطلوب ہے جہاں تک کہ استقبال اور کبو کا تعلق ہے[1]۔ گرینوچ کے دوسرے دس سالہ کیٹلاگ سے جس میں ۶۸۹۲ ستاروں کے حوالے درج ہیں

---

[1] دیکھو بحری جنتری بابتہ سنہ ۱۹۱۰ء جس میں ضلالت اور ذاتی حرکت کے لیے بھی تصحیحات درج ہیں۔ نیز دیکھو گیارہواں باب دفعہ ۹۱۔

یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۱۸۹۰ء میں جوزا (بہ) کا اوسط مقام حسب ذیل ہے:

عہ = ۷گ ۳۸م ۳۵۱۰۶ش، ضہ = ۲۸° ۱۷َ ۲۸۴ء۲۸ً

اِن قیمتوں کو ۳۰۷۳ء۳ش + ۱۳۳۶ء۱ش جب عہ مس ضہ میں درج کرنے سے

ہم دیکھتے ہیں کہ سالانہ استقبال ۳ء۲۷ش ہے، پس چونکہ اِس صورت میں ت۱ - ت، بیس سال ہے اِس لیے صعود مستقیم میں استقبال ۱۸۱۰ء کے اوسط مقام سے ۱۹۱۰ء کے اوسط مقام تک ۱م ۵۴ء۱۴ش ہے۔ اسی طرح میل میں سالانہ استقبال ۲۰۱۰۵ً جم عہ (= -۳ء۸ً) ہے اور اس لیے ۲۰ سال میں اس کی مقدار - (۲َ ۲ء۷۴ً) ہوتی ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ ۱۹۱۰ء میں جوزا (بہ) کا اوسط مقام حسب ذیل ہے

عہ = ۷گ ۳۹م ۶۰ء۴۹ش، ضہ = ۲۸° ۱۴َ ۱۲ء۴۱ً

اب ہمیں وہ تصحیحات عمل میں لانی چاہئیں جن سے اس کا ظاہری مقام بتاریخ ۷ نومبر ۱۹۱۰ء حاصل ہوتا ہے۔ اس دن کے لیے بحری جنتری صفحہ ۲۵۰ سے حاصل ہوتا ہے

ف = ۵ء۷۱، لوک گ = ۱۰۹۹ء۱، گ = ۳۲۳° ۱۰َ

قوس میں عہ کا معادل ۱۱۴° ۵۷َ ۲۴ً ہے، اِس لیے گ + عہ = ۷۸° ۷َ

اور اس لیے $\frac{1}{15}$ گ جب (گ + عہ) مس ضہ = ۴۶ء۰ش پس عہ کیلئے تصحیح ہے ۵ء۷۱ش + ۴۶ء۰ش = ۶ء۲۱ش۔ میل ضہ کے لیے تصحیح ہے گ جم (گ + عہ) = ۷ء۰ً۔ بالآخر بتاریخ ۷ نومبر ۱۹۱۰ء ستارہ کا مطلوبہ ظاہری مقام ہے

عہ = ۷گ ۳۹م ۸۱ء۵۱ش، ضہ = ۲۸° ۱۴َ ۹ء۴۱ً

(۱۹۲) اگر وقت ت = ۰ پر خط استوا پر کے ایک ستارہ کا صعود مستقیم اوسط

اعتدال کے حوالہ سے عہ ہو تو اس ستارہ کا اصلی صعود مستقیم وقت ت (جبکہ ت کو سالوں میں بیان کیا جائے) پر جہاں تک کہ ۷ کی حرکت کا تعلق ہے حسب ذیل ہوگا :-

عہ = عہ + ۳٫۰۷۳ ش ت − ۱٫۰۶ ش جب چ − ۰٫۰۸ ش جب ۲ ل

اس ضابطہ میں ۳٫۰۷۳ وہ سالانہ تبدیلی ہے جو صعود مستقیم میں استقبال کی باعث واقع ہوتی ہے اور پہلی دو رقمیں وقت ت پر اوسط صعود مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں۔ آخری دو رقمیں کبو کی وجہ سے ہیں۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ کسی استوائی ستارہ کے صعود مستقیم کے تغیرات اپنی اوسط قیمت سے حدود + ۱٫۱۴ ش اور − ۱٫۱۴ ش کے درمیان رہتے ہیں۔ جہاں تک کبو کی خاص رقم کا تعلق ہے ممکنہ تبدیلیوں کا ایک مکمل دور ½۱۸ سال میں پورا ہوتا ہے، جیسا کہ قبل ازیں بیان کیا جا چکا ہے۔ یہ وہ مدت ہے جس میں چ، بقدر ۳۶۰° زاویہ کے بڑھتا ہے۔

فرض کرو کہ چاند کے عقدہ کے طول بلد میں اور سورج کے اوسط طول بلد میں یومی تبدیلیاں علی الترتیب مف چ اور مف ل ہیں تو ۷ میں یومی تبدیلی کبو کی وجہ سے حسب ذیل ہوگی

− ۱٫۰۶ ش جم چ مف چ − ۰٫۱۲ ش جم ۲ ل مف ل

مف چ اور مف ل کی قیمتیں نیم قطری زاویوں میں تقریباً − ۰٫۰۰۰۹۲۷ اور ۰٫۰۱۷۲ ہیں اور اس لیے ۷ میں یومی تبدیلی قریب قریب

۰٫۰۰۱ ش جم چ − ۰٫۰۰۳ ش جم ۲ ل

کے مساوی ہے۔ اس جملہ کو حدود − ۰٫۰۰۴ ش اور + ۰٫۰۰۴ ش کے درمیان واقع ہونا چاہیئے اور اس لیے کسی کوکبی یوم اور اوسط کوکبی یوم کے درمیان فرق ۰٫۰۰۴ ش سے متجاوز نہیں ہو سکتا اور نہ − ۰٫۰۰۴ ش سے گھٹ سکتا ہے۔

ہم نے دفعہ ۲۳ میں کوکبی یوم کی تعریف اُس وقفہ سے کی ہے جو ♈ کے دو متواتر مُروروں کے درمیان ہوتا ہے۔ اب یہ معلوم ہوتا ہے کہ تمام کوکبی یوم ٹھیک مساوی نہیں ہوتے کیونکہ ♈ کی حرکت بالکل یکساں نہیں ہے۔ اس لیے یہ خیال ہو سکتا ہے کہ اوسط کوکبی یوم اور ظاہری کوکبی یوم میں، جو ♈ کے دو مُروروں کے درمیان ہوتا ہے اور اس لیے کسی قدر متغیر ہے، امتیاز کرنا چاہیے۔ اس کے ساتھ ہی ہمیں اُس امتیاز کا خیال آتا ہے جو ظاہری شمسی یوم اور اوسط شمسی یوم کے درمیان ہے لیکن فی الحقیقت اِن دو صورتوں میں کوئی مماثلت نہیں ہے۔ ایک ہی سال میں دو ظاہری شمسی دنوں کا درمیانی فرق دو کوکبی دنوں کے بڑے سے بڑے درمیانی فرق کا کئی ہزار گنا ہو سکتا ہے (دیکھو صفحہ ۳۳۲)۔

(۱۹۳) اگر ہمارے پاس ایک نظری طور پر مکمل گھڑی ہو جو بغیر کسی تصحیح کے ۱۸½ سال تک ایسا ٹھیک وقت دے کہ ہر اوسط کوکبی یوم کے ختم پر اِس کی سوئیاں ۰گ ۰م ۰ش وقت بتلائیں تو ♈، ۱۸½ سال تک روزانہ مختلف اوقات پر جو ۲۳گ ۵۹م ۵۹٫۸۶ش اور ۰گ ۰م ۰٫۱۴ش کے درمیان واقع ہوں گے مُرور کرے گا۔ لیکن ایسی کوئی کامل گھڑی موجود نہیں ہے اور بہترین گھڑیاں جو موجود ہیں اِن میں اکثر مشاہدات کے مقابلہ سے تصحیح کرنی پڑتی ہے، وہ غلطیاں جو ایک تصحیح اور دوسری تصحیح کے درمیان پیدا ہوتی ہیں اور ♈ کی بے قاعدگیوں کی وجہ سے ہیں نظر انداز کیجاتی ہیں کیونکہ وہ خطا کے دیگر ماخذوں کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہیں۔ اِس لیے ہم کوکبی یوم کی تعریف یہ کرتے ہیں کہ اِس کا آغاز، اصلی راس الحمل کے مُرور سے ہوتا ہے۔

کوکبی وقت کی پیمائش پر ♈ کی حرکت کے اثر کی حقیقی حد کی وضاحت کے لیے ہم ۱۰ر جون اور ۲۰ر جون ۱۹۰۹ء کی صورت لیں گے۔ پہلی تاریخ کے لیے الفیمرس سے کبو - ۰٫۰۵ ش اور دوسری تاریخ کے لیے - ۰٫۰۲ ش

حاصل ہوتا ہے۔ خطا کے دیگر ذریعوں کو نظر انداز کرنے سے کبو کے تغیر کی شرح اوسطاً ۰۰۳ء ثانیہ فی یوم کے مماثل ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ اس قدر چھوٹی مقدار بمقابل اُن بڑی تبدیلیوں کے جو گھڑی کی شرح میں اُسکے پُرزوں کے نقائص یا آب و ہوا کے اثرات سے پیدا ہوتے ہیں قابل اتفات نہ ہوسکے گی۔ نیز ۷ کی بے قاعدگی سے جو خطا پیدا ہوتی ہے وہ وقت کے ساتھ ساتھ جمع نہیں ہوتی کیونکہ ۱۸ ار اکتوبر کو کبو پھر ۰۰۵ء ثانیہ ہو جاتا ہے اور اس لیے ۱۰ء جون سے ۱۸ اکتوبر تک اس سبب سے گھڑی کی شرح کی اوسط ظاہری تبدیلی صفر ہوگی۔

پس گھڑی کی خطا کو اکثر متعین کرتے رہنے سے نہ صرف وہ چھوٹی بے قاعدگیاں دُور ہونگی جو گھڑی جیسی مشین میں ناگزیر ہیں خواہ وہ کتنی ہی احتیاط سے بنائی جائے بلکہ ساتھ ہی ہم یہ مان سکیں گے کہ تصحیح کے بعد جو کوئی وقت گھڑی سے معلوم ہوتا ہے وہ پوری ضروری صحت کے ساتھ راس الحمل کا ساعتی زاویہ ہے۔

ایک ستارہ کے مقام پر استقبال اور کبو کے اثرات کی تحقیق حسب ذیل دوسرے طریقہ سے کرنا مفید ہوگا۔

چونکہ ستارہ کا طول بلد راس الحمل سے ناپا جاتا ہے اس لیے خط اُستوا کی استقبالی حرکت ستارہ کے طول بلد کو تبدیل کرے گی لیکن اس کا عرض بلد غیر متغیر رہے گا۔ مثلاً اگر ستارہ کا طول بلد کسی وقت پہ لہ ہو اور اگر راس الحمل اس طرح حرکت کرے کہ ستارہ کا طول بلد لہ + مف لہ ہو جائے اور ساتھ ہی میلان سہ' سہ + مف سہ ہو جائے تو مساواتوں کے حسب ذیل دو نظامات حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں مساواتوں (۱) (۲)، (۳) سے عہ اور ضہ کی قیمتیں پہلی آن کے لیے حاصل ہوتی ہیں اور پھر مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) سے مف عہ اور مف ضہ ملتے ہیں جو زیر بحث وقفہ میں استقبال کی وجہ سے ان محددوں کی تبدیلیاں ہیں۔

جم ضہ جب عہ = جب لہ جم بہ جم سہ ـ جب بہ جب سہ' ...... (۱)

جم ضہ جم عہ = جم لہ جم بہ، .... (۲)

جب ضہ = جب لہ جم بہ جب سہ + جب بہ جم سہ، ..... (۳)

اور

جم (ضہ + مف ضہ) جب (عہ + مف عہ) = جب (لہ + مف لہ) جم بہ جم (سہ + مف سہ)

- جب بہ جب (سہ + مف سہ)، ... (۴)

جم (ضہ + مف ضہ) جم (عہ + مف عہ) = جم (لہ + مف لہ) جم بہ، ..... (۵)

جب (ضہ + مف ضہ) = جب (لہ + مف لہ) جم بہ جب (سہ + مف سہ)

+ جب بہ جم (سہ + مف سہ)، ..... (۶)

ان مساواتوں سے مف عہ اور مف ضہ معلوم ہوتے ہیں جبکہ مف لہ اور مف سہ دئیے گئے ہوں اور حل عام ترین صورت میں بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے۔ لیکن علم ہیئت میں وہ صورت جو سب سے زیادہ عام طور پر مستعمل ہے اس میں یہ چار مقداریں مف لہ، مف سہ، مف عہ، مف ضہ سب کی سب چھوٹی مقداریں ہیں اور ہم راست حسب ذیل طریقہ پر عمل جاری رکھتے ہیں:-

(۳) کو تفرق کرنے اور جم ضہ سے تقسیم کرنے (کیونکہ ضہ = ۹۰° کی صورت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں ہے) سے اور مختصر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

مف ضہ = جم عہ جب سہ مف لہ + جب عہ مف سہ

نیز (۱) کو تفرق کرنے اور جم ضہ سے تقسیم کرنے سے

جم عہ مف عہ - مس ضہ جب عہ مف ضہ = جم عہ جم سہ مف لہ - مس ضہ مف سہ

اس طرح حسب ذیل نتیجے حاصل ہوتے ہیں جن سے صعود مستقیم اور میل پر استقبال کے اثرات اکثر مقاصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ محسوب کئے جا سکتے ہیں۔

اگر راس الحمل کا محل طریق الشمس پر اس طرح ہٹے کہ سب طول بلد بقدر چھوٹی مقدار مف لہ کے بڑھ جائیں اور اگر میلان سہ میں بقدر چھوٹے

زاویہ مف سہ کے اضافہ ہو تو کسی ستارہ کے صعود مستقیم اور میل میں متناظر
تبدیلیاں مف عہ اور مف ضہ، مساواتوں

مف عہ = (جم سہ + جب عہ مس ضہ جب سہ) مف لہ - مس ضہ جم عہ مف سہ،
مف ضہ = جم عہ جب سہ مف لہ + جب عہ مف سہ

سے ملیں گی۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی دئے ہوئے دن میں جن ستاروں کے میل استقبال کی وجہ سے بڑھ جاتے ہیں اور جن کے میل استقبال کی وجہ سے گھٹ جاتے ہیں اِن دونوں کے درمیان خط فاصل ایک بڑا دائرہ ہے جس پر کے ستارے اُس دن میل میں کوئی استقبال نہیں رکھتے۔

کیونکہ اگر جم (گ + عہ) = ۰ تو وہ سب ستارے جن کا صعود مستقیم ۹۰° - گ یا ۲۷۰° - گ ہے میل میں استقبال کی وجہ سے نہیں بدلتے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ غیر تابع یومی اعداد سے کس طرح طریق الشمس کا میلان آسانی کے ساتھ محسوب کیا جا سکتا ہے۔ (۱۹۵)

دفعہ ۵۹ کی مساوات کی رُو سے گ جب گ = - (سَہ - سہ) اور
اس لیے سَہ = سہ - گ جب گ

مثلاً بتاریخ ۲ مارچ سنہ ۱۹۱۰ء بحری جنتری صفحہ ۲۴۵ سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ لوک گ = ۰،۷۲۲۳۲ اور گ = ۲۴۳° ۹ ۴َ' اِس لیے گ جب گ = -۴۷،۴ً اور چونکہ اوسط میلان بابتہ سنہ ۱۹۱۰ء (بحری جنتری صفحہ ۱) ۲۳° ۲۷َ ۵۸،۳ً ہے اِس لیے میلان جبکہ اِس کی تصحیح کبو کے لیے کی جائے ۲۳° ۲۷َ ۳۲،۸ً ہے۔ نیز چونکہ اوسط میلان یکساں طور پر سالانہ ۰،۴۶۸ً کی شرح سے گھٹتا ہے اِس لیے اِس میلان میں سے ۰،۰۸ً گھٹانا چاہئے تاکہ ۲ مارچ سنہ ۱۹۱۰ء کو ظاہری میلان حاصل ہو جائے چنانچہ یہ میلان ۲۳° ۲۷َ ۳۲،۸ً ہے۔ (دیکھو بحری جنتری صفحہ ۲۱۷)۔

مثال ۳۔ سال کے آغاز پر اوسط اعتدالی نقطہ ♈ ہے۔ بتاؤ کہ ♈ کے لحاظ سے طریق الشمس پر ظاہری اعتدالی نقطہ کا محل ♈ کس طرح محسوب

کیا جا سکتا ہے۔

۲ ۲. مقدار ک ہے جو دفعہ ۵۹ مساواتوں (۲) کی رُو سے (۲۲۵ ف۲ + گ۲ جم۲ گ)½ کے مساوی ہے۔ مثلاً بتاریخ ۲۵ر دسمبر ۱۹۱۰ء (نیم شب) ف = ۲۷۴ء۲، لوک گ = ۱۸-۲۰ء۱ اور گ = ۸ ۳۸° ۴۷′ (بحری جنتری صفحہ ۲۵۱)، اس لیے ک = ۲ء۷۲″۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ دُب اصغر (صہ) کے صعود مستقیم میں سالانہ استقبال ۔۳۰ء۶ ث ہے، یہ دیا گیا ہے کہ عہ = ۱گ ۱۶ ۵۶م ۱۲ث اور ضہ = ۸۹° ۱۲′ (۱۹۰۰ء)۔

مثال ۵۔ اس امر کی تشریح کرو کہ ایک سماوی گولے کی مدد سے کس طرح یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ تاروں کے جو مجموعے ۲۰۰۰ سال قبل کیمرج کے عرض بلد میں نظر آتے تھے وہ اب وہاں نظر نہیں آتے۔ نیز یہ بتاؤ کہ آسمان کے کس حصہ میں وہ واقع ہیں۔

۶۰۔ ستاروں کی ذاتی حرکتیں

۔ ہم دیکھ آئے ہیں کہ کسی ستارے کے صعود مستقیم اور میل میں تبدیلیوں کی ایک وجہ یہ ہے کہ ان بڑے دائروں میں تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں جن کے حوالہ سے ستارہ کے یہ محدد لیے جاتے ہیں۔ ان تبدیلیوں کے علاوہ بہت سے ستاروں کی صورت میں مقام کی حقیقی تبدیلیاں ہیں جو خود ستاروں کی اصلی حرکتوں کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں ان تبدیلیوں کو ہم ذاتی حرکتیں کہیں گے۔ وہ ستارہ جو شمالی نیم کرہ میں اس قسم کی بڑی سے بڑی معلومہ حرکت رکھتا ہے برج کلاب الصید[1] میں مقدار ۶ء۵ کا ایک چھوٹا ستارہ ہے۔ گروم برج (Groombridge) کے کیٹلاگ میں اس ستارہ کا عدد ۱۸۳۰ ہے اور اس کے محدد ۱۹۰۰ء کے لیے یہ ہیں

عہ = ۱۱گ ۴۷ء۲م، ضہ = + ۳۸° ۲۶′

[1] Canes Venatici

یہ ستارہ سالانہ ۷″ کی ایک قوس پر حرکت کر لیتا ہے اور چونکہ اس کا فاصلہ بھی معلوم ہے اس لیے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اس کی رفتار ۱۵۰ میل فی ثانیہ سے کم نہیں ہونی چاہیئے۔ اس ستارہ کی حرکت سے بڑی حرکت رکھنے والا ایک چھوٹا ستارہ (مقدار ۸٫۵) جنوبی نیم کرہ میں ہے اور اسکی ذاتی حرکت سالانہ ۸٫۷″ ہے جس کو کپٹین اور اننس (Kapteyen, Innes) نے معلوم کیا تھا۔ اس ستارہ کے محدد ہیں

عہ = ۵گ ۷٫۷م ، ضہ = −۴۵° ۳′

(۱۹۶) چمکدار تاروں میں بڑی سے بڑی ذاتی حرکت قنطورس (عہ {عہ = ۱۴گ ۳۲٫۸م ، ضہ = −۶۰° ۲۵′ (سنہ ۱۹۰۰ء)} کی ہے جس کی مقدار سالانہ ۳٫۷″ ہے اور اس کی سمت ایسی ہے کہ صعود مستقیم میں −۰٫۴۹ش کی اور میل میں +۰٫۷″ کی سالانہ تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ سماک رامح (Arcturus) {عہ = ۱۴گ ۱۱٫۱م ، ضہ = +۱۹° ۴۲′ (سنہ ۱۹۰۰ء)} سالانہ ۲٫۳″ کی ذاتی حرکت رکھتا ہے جو ۲۵٫۷ میل فی ثانیہ کی رفتار کے متناظر ہے اور اس ذاتی حرکت کا سالانہ اثر صعود مستقیم پر −۰٫۰۸ش اور میل پر −۲٫۰″ ہے۔ ایفیمرس میں سالتمام کے لیے ستاروں کے ظاہری مقامات دینے میں ذاتی حرکت کا لحاظ رکھا جاتا ہے اگر وہ قابل قدر ہو۔

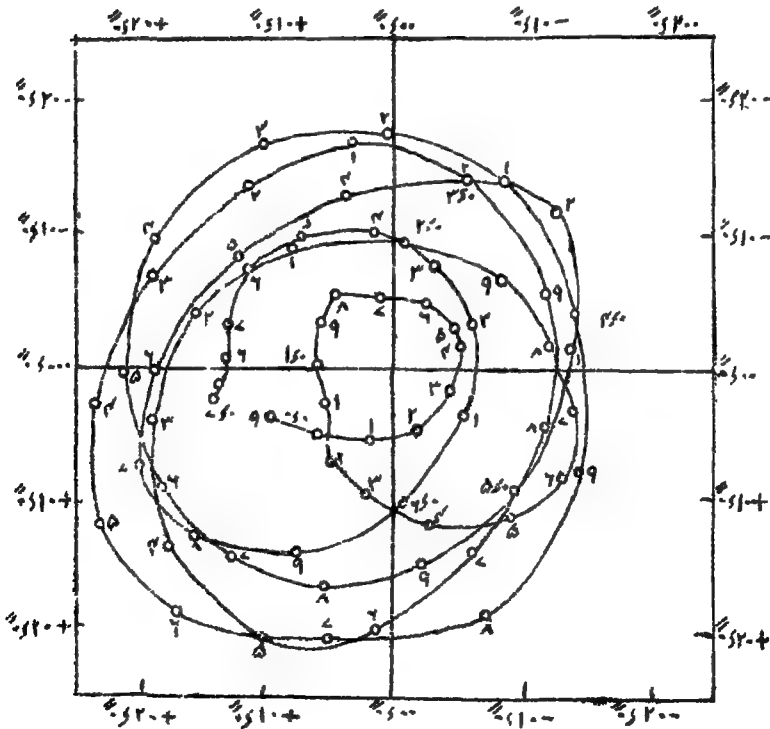
یہ ذاتی حرکتیں جن کا اوپر ذکر کیا گیا ہے وہ ہیں جو کرہ سماوی پر ستارہ کے محددوں کو متاثر کرتی ہیں۔ لیکن اگر کوئی ستارہ خط نظر میں حرکت کر رہا ہو تو اس حرکت سے اس کے کروی محدد نہیں بدلتے اور ایسی حرکت کا وجود صرف طیف پیمائی مشاہدات سے ہی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً گروم برج ۱۸۳۰ کے متعلق یہ معلوم ہوا ہے کہ وہ ہمارے نظام شمسی کی طرف ۵۹ میل فی ثانیہ کی شرح سے آرہا ہے۔ قبل ازیں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اس ستارہ کی

مماسی رفتار ۱۵۰ میل فی ثانیہ ہے، اس لیے فضا میں سورج کے لحاظ سے اس کی کل رفتار تقریباً ۱۶۰ میل فی ثانیہ معلوم ہوتی ہے۔

۶۱ — ارضی عرض بلدوں میں تغیرات۔

کوسٹنر (Kustner) نے معلوم کیا کہ وہ محور جس کے گرد زمین گھومتی ہے بلحاظ زمین کے ایک چھوٹی حرکت رکھتا ہے۔ زمین کے محور میں ایسی تبدیلی کا یہ اثر ہوتا ہے کہ ارضی قطبوں کے محل بدل جاتے ہیں اور اس لیے ارضی خط استوا کا محل بدل جاتا ہے۔ اس لیے زمین کی سطح پر کے کسی نقطہ کے عرض بلد میں تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں جو اس نقطہ کی واقعی حرکت کی وجہ سے نہیں ہیں بلکہ اس قاعدہ میں تبدیلیوں کی وجہ سے ہیں جس سے عرض بلد ناپے جاتے ہیں۔ اس مضمون کی سب سے پہلی باقاعدہ تحقیق چیانڈلر (Chandler) نے ۱۸۹۱ء میں کی۔ اس سے یہ پتا پایا کہ عرض بلد میں مشاہدہ شدہ تبدیلیاں اس مفروض کے ذریعہ بظاہر سمجھائی جا سکتی ہیں کہ زمین کا قطب تقریباً چودہ ماہ کے وقفہ میں تیس فٹ کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ خود چیانڈلر اور دیگر علماء ہیئت کی بعد کی تحقیقاتوں نے یہ ثابت کیا کہ گو یہ عام واقعہ صحیح ہے کہ قطب متحرک ہے لیکن اس کی حرکت کی نوعیت اسقدر سادہ نہیں ہے جیسے کہ پہلے فرض کیجا چکی تھی۔ ہم یہاں وہ نقشہ (شکل ۶۱) نقل کرتے ہیں جو پروفیسر البرخت (Albrecht) نے انٹرنیاشنل جیوڈیٹک ایسوسی ایشن (Int. Geodetic Association) کے کام کے مشہور نتیجہ کے طور پر "Astronomische Nachrichten" میں دیا ہے۔ اس روئداد کا حوالہ بھی دیا جا سکتا ہے جو مسٹر سڈنی ڈی ٹاونلی (Sidney Townley) نے (The Publications of the Astronomical Society of the pacific کی جلد ۱۹ صفحہ ۱۵۲ میں درج ہے۔

اس نقشہ میں شکل کے مرکز پر کا مبدا زمین میں شمالی قطب کا اوسط محل ہے اور منحنیوں پر نشان کئے ہوئے نقطوں سے متناظر تاریخوں پر

قطب کے حقیقی محل معلوم ہوتے ہیں۔ مثلاً مرکز سے جو قریب ترین منحنی ہے اُس سے قطب کی حرکت سنہ ۱۸۹۹٫۹ء سے سنہ ۱۹۰۱٫۰ء تک معلوم ہوتی ہے اور پھر اس سے آگے کی ترسیم اس کے مختلف لفیفوں میں سنہ ۱۹۰۶ء تک معلوم کیجا سکتی ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ قطب کے محل ایک مربع کے اندر شامل ہیں جس کا ہر ضلع زمین کے مرکز پر تقریباً ۰٫۵″ کا زاویہ بناتا ہے۔ پس قطب کی حرکتیں ان چھ سالوں میں ایک مربع کے اندر رہتی ہیں جس کے ضلع ۵۰ فٹ سے بڑے نہیں ہیں۔ انفرادی محل بڑی حد تک مشتبہ ہیں۔

شکل (۶۱)

آٹھویں باب پر مثالیں

(۱۹۸)

مثال ۱ — یہ تسلیم کرکے کہ استقبال کا مستقل ۵۰٫۲۴۵۳ ت + ۰٫۰۰۰۱۱۱۲۵ ت² ہے جہاں ت، سالوں میں سنہ ۱۸۵۰ء سے وقفہ ہے، سالوں کی وہ تعداد معلوم کرو جو ۷ کے طریق الشمس کا مکمل دور کرنے سے قبل گذرنی چاہئے —

تکمیل کرنے سے ت سال میں ۷ کی حرکت معلوم ہوتی ہے اور اگر لا وہ عدد ہو جس کی تلاش ہے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

۵۰٫۲۴۵۳ لا + ۰٫۰۰۰۱۱۱۲۵ لا² = ۱۲۹۶۰۰۰

اس دو درجی کی دو اصلوں میں سے ایک منفی ہے اور اس لیے ناقابل قبول، دوسری اصل ۲۴۴۶۸ ہے یا تقریباً ۲۴۵۰۰ —

* **مثال ۲** — ثابت کرو کہ کرۂ سماوی پر کے وہ نقطے جہاں استقبال اور کبو کی وجہ سے صعود مستقیم میں تصحیح کسی دئے ہوئے دن میں صفر ہے مخروط

ن (لا² + ما²) + ۱/۱۵ گ ی (لا جب گ + ما جم گ) = ۰

پر واقع ہوتے ہیں جہاں مبداء سورج کے مرکز پر ہے اور محاور + لا، + ما، + ے علی الترتیب ان نقطوں میں سے گذرتے ہیں جن کے صعود مستقیم اور میل (۰°، ۰°)، (۹۰°، ۰°)، (۰°، ۹۰°) ہیں اور جہاں ف، گ، گ زیر بحث دن کے لیے غیر تابع یومی اعداد ہیں — اگر کبو کو ترک کر دیا جائے تو دفعہ ۵۷ کی مثال ۶ اخذ کرو —

مثال ۳ — کبو کو نظر انداز کرکے ثابت کرو کہ ستارہ (ع، ضہ) کی نصف النہار تک دو متواتر واپسیوں کے درمیان وقفہ کوکبی یوم سے بقدر ۰٫۰۰۳۶۶ ث جب ع سس ضہ کے متجاوز ہوگا جہاں کوکبی یوم وہ وقفہ ہے جو

۷ کے دو مروروں کے درمیان ہے اور یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ستارہ کی کوئی ذاتی حرکت نہیں ہے۔

مثال ۴ ۔ طریق الشمس پر ایک ستارہ کا صعود مستقیم ع ہے، اس کا میل ضہ اور طول بلد ل ہے۔ صعود مستقیم، میل، اور طول بلد میں استقبال علی الترتیب عَ، ضَہ، لَ ہیں۔ حسب ذیل رشتے ثابت کرو

ضَہ مم ضہ = لَ مم ل = عَ مم ع جم ۲ ضہ

مثال ۵ ۔ کرۂ سماوی پر کے ستاروں کو ایک استوار نظام سمجھا گیا ہے، اور یہ فرض کیا گیا ہے کہ ستارے حسب ذیل تین گردشوں کے ماتحت ہیں:

(۱) ۷ کو قطب مان کر اس کے گرد ایک چھوٹے زاویہ عا میں سے گردش
(۲) ب کو " " " " " " ضا " "
(۳) ق کو " " " " " " طا " "

جہاں ق شمالی قطب ہے اور ب وہ نقطہ ہے جس کے محدد ع = ۹۰°، ضہ = ۰ ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر ایک ستارہ کے محددوں ع اور ضہ میں تبدیلیاں جو اس طرح پیدا ہوتی ہیں مف ع، مف ضہ ہوں تو

مف ع = ـ عا جم ع مس ضہ ـ ضا جب ع مس ضہ + طا،

مف ضہ = عا جب ع ـ ضا جم ع

یہ سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ علم ہندسہ صغاری کی مدد سے ثابت ہوتا ہے اگر ان میں سے ہر گردش پر جدا جدا غور کیا جائے۔

مثال ۶ ۔ ثابت کرو کہ سال کی کسی تاریخ ت پر استقبال اور کیو سے متاثرہ خط استواء کا ظاہری مقام اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ آغاز سال پر خط استواء کا جو محل تھا اس پر حسب ذیل تین گردشیں عائد کی جائیں:۔ (۱۹۹)

(۱) ۷ کو قطب مان کر اس کے گرد چھوٹے زاویہ گ جب گ میں سے گردش
(۲) ب کو " " " " " گ جم گ
(۳) ق کو " " " " ۔ ۱۵ ف " "

جہاں ق شمالی قطب ہے اور ب وہ نقطہ ہے جس کے محدد عہ = ۹۰° ضہ = ۰ ہیں۔

وہ نقطہ جہاں سال کے آغاز میں ♈ واقع تھا تاریخ ت کے اُستوار کے لحاظ سے محدد عہَ = ۱۵ اف، ضہَ = گ جم گ رکھتا ہے جہاں ف وقت کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے۔ اسی طرح نقطہ ب سال کے اغاز میں تاریخ ت کے اُستوار کے لحاظ سے محدد عہَ = ۹۰° + ۱۵ اف، ضہَ = گ جب گ رکھتا ہے۔ علم ہندسہ سے یہ واضح ہے کہ شطبوں ♈، ب، ق کے گرد گردشیں گ جب گ، گ جم گ اور - ۱۵ اف، زیر بحث دو نقطوں کو آغاز سال کے استوار سے تاریخ ت کے استوار تک لیجائیں گی۔

مثال ۷۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ ستاروں کے صعود مستقیم او رمیل پر وقفہ ت میں استقبال اور کبو کا اثر اُس اثر کے مماثل ہے جو کرہ سماوی کو (وہ کرہ سماوی جس میں ستارے ہیں لیکن حوالہ کے دائرے نہیں) ایک قطر کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتا ہے جو اُس نقطہ میں سے گذرتا ہے جس کا طول بلد صفر ہے اور عرض بلد

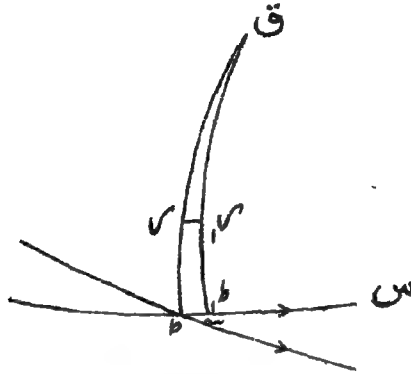
$$\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ات} + \text{مف ل}}{\text{مف سہ}}\right)$$

ہے۔ گردش کا زاویہ

$$\left\{(\text{ات} + \text{مف ل})^2 + (\text{مف سہ})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ہے اور اس کی سمت رجعی ہے جہاں ا استقبال کا مستقل ہے اور مف ل، مف سہ علی الترتیب طول بلد میں اور طریق الشمس کے میلان میں کبو ہیں۔

طول بلد میں استقبال اور کبو کا اثر کرہ سماوی کو طریق الشمس کے قطب ق کے گرد زاویہ ات + مف ل = ط ق ط، (شکل ۶۲) میں سے گھمانے سے پیدا کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح ق ط پر کا کوئی نقطہ ر، ق ط، پر کے نقطہ ر، پر منتقل ہوتا ہے۔ اِس گردش کی سمت اس لازمی نتیجہ سے متعین

ہوتی ہے کہ وہ ہر نقطہ کے طول بلد کو بڑھانی چاہیئے ۔

شکل (۶۲)

(۲۰۰) اُس تبدیلی کو پیدا کرنے کے لیے جو کبو مف سہ کی وجہ سے سہ میں واقع ہوتی ہے کرۂ سماوی کو ط کے گرد گھمانا چاہیئے ۔ زاویہ مف سہ میں سے خط اُستواء کی حرکت اُس زاویہ کو بڑھا دیتی ہے جو طریق الشمس ط س اور خط استواء کے درمیان ہے لیکن طریق الشمس ثابت رہتا ہے ۔ یہ اثر وہی ہوگا گویا سب نقطوں کو ط کے گرد خلاف سمت ساعت گردش مف سہ دی گئی ہے ۔ ق ط پر کا ہر نقطہ بائیں جانب حرکت کرے گا اور کوئی خاص نقطہ سا ایسا ہوگا جو اپنے ابتدائی مقام سا پر واپس آئے گا ۔ پس جہاں تک اس نقطہ کا تعلق ہے یہ دو گردشیں ایک دوسرے کی تعدیل کرتی ہیں ۔ اس لیے ط اور ق کے گرد یہ دو گردشیں، سا کے گرد ایک گردش میں ترکیب پاتی ہیں ۔

اگر سا کا عرض بلد طہ ہو تو ط سا = طہ اور

سا سا، = (ا ت + مف ل) جم طہ = مف سہ جب طہ

اس لیے مس طہ = (ا ت + مف ل) | مف سہ اور چونکہ ترکیبی گردشیں علی القوائم ہیں اس لیے حاصل، اِن کے مربعوں کے مجموعہ کا جذر المربع ہے یعنی

$$\sqrt{(\text{ا ت} + \text{مف ل})^2 + (\text{مف سہ})^2}$$

(۲۰۱)

نواں باب

کوکبی وقت اور اوسط وقت

دفعہ　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　صفحہ

۶۲ — کوکبی وقت۔

ہم دیکھ چکے ہیں (مثال صفحہ ۳۰۴) کہ ♈ تقریباً ۲۴۵۰۰ سال میں سماوات کی ایک مکمل گردش کی تکمیل کرتا ہے اور وہ ایسی سمت میں کہ اس وقفہ میں ستارے ♈ کی بہ نسبت ایک مکمل ظاہری گردش کم کر چکتے ہیں۔ زمین کی محوری گردش کے عرصہ کو کوکبی یوم (دفعہ ۳۳) کے ساتھ وہی نسبت ہے

جو ۲۴۲۵۰۰ سال + ایک دن کو ۲۴۵۰۰ سال سے ہے۔ اس طرح زمین کی محوری گردش کی مدت کوکبی یوم سے (جو رصدگاہ میں عملاً استعمال ہوتا ہے) تقریباً بقدر ثانیہ کے ایک سویں حصہ کے بڑی ہے۔ دفعہ ۹۵ میں یہ بتایا جاچکا ہے کہ ♈ کی حرکت میں بے قاعدگیوں کی وجہ سے کوکبی یوم کے طول میں جو تغیرات ہوتے ہیں وہ اس قدر چھوٹے ہیں کہ انہیں نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

کوکبی گھڑی میں جس سے ہمارا مطلب ایسی گھڑی سے ہے جو کوکبی وقت کو بتلاتی ہے ایک ڈائل ہوتا ہے جو ۲۴ مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے اور ان حصوں پر صفر سے لیکر ۲۳ تک ہندسے کندہ ہوتے ہیں۔ جب ♈ مشاہد کے نصف النہار پر ہوتا ہے تو کوکبی گھڑی (اگر اس میں کوئی خطا نہیں ہے) وقت گ م ث بتلاتی ہے اور اگر گھڑی کی رفتار صحیح ہو تو وہ پھر وقت گ د ث بتلائے گی جبکہ ♈ نصف النہار پر پھر واپس ہوگا۔

(۲۰۲) رصدگاہ میں کوکبی وقت کا انتظام رکھنے میں یہ خاص فائدہ ہے کہ ایک ہی ستارہ بعض چھوٹی تصحیحات کے تحت نصف النہار کو ہر دن ایک ہی کوکبی وقت پر عبور کرتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ایک ستارے کی ذاتی حرکت کی سالانہ مقدار قوس کے خ ثانئے ہو یعنی اگر ستارہ اپنے محل سے ایک سال کے عرصہ میں کرۂ سماوی پر قوس کے خ ثانئے ہٹے تو ثابت کرو کہ اس حرکت کا جہاں تک تعلق ہے اس ستارہ کے دو متواتر مروروں کے درمیان وقفہ، ایک کوکبی یوم سے

۰٫۰۰۰۰۸ خ قط ضہ ثانیوں

سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتا جہاں ضہ ستارہ کا میل ہے۔

مثال ۲۔ اگر راس الحمل کا فاصلہ ایک ثابت استوائی ستارہ سے

پ + ق ت + ا جم م ت + ب جب م ت

ہو جہاں پ، ق، ا، م، ب مستقل ہیں اور ت وقت ہے جو سالوں میں دیا گیا ہے تو ثابت کرو کہ راس الحمل کے دو متواتر بالائی مروروں کے درمیانی وقفہ کے

حسب ذیل دو انتہائی حدود ہوں گے

$$\frac{\text{گ}}{۲۴} + \text{م}\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} \Big\backslash ۳۶۶٫۲۴$$

اور

$$\frac{\text{گ}}{۲۴} - \text{م}\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} \Big\backslash ۳۶۶٫۲۴$$

فرض کرو کہ ♈ کے بالائی مُرور کا ایک وقت تَ ہے تو دوسرا بالائی مرور تقریباً وقت $\text{تَ} + \frac{1}{۳۶۶٫۲۴}$ پر واقع ہوگا۔ ♈ کا فاصلہ اِس کے ابتدائی محل سے بقدر

$$\text{پ} + \text{ق}\left(\text{تَ} + \frac{1}{۳۶۶٫۲۴}\right) + \text{ا جم م تَ} - \text{م ا} \frac{1}{۳۶۶٫۲۴} \text{جب م تَ}$$

$$+ \text{ب جب م تَ} + \text{م ب} \frac{1}{۳۶۶٫۲۴} \text{جم م تَ}$$

$$-(\text{پ} + \text{ق تَ} + \text{ا جم م تَ} + \text{ب جب م تَ})$$

کے تبدیل ہو چکا ہوگا۔

اِس میں دَوری حصہ $\frac{\text{م}}{۳۶۶٫۲۴}(\text{ب جم م تَ} - \text{ا جب م تَ})$ ہے اور تَ کی کوئی ایسی قیمت نہیں ہے جو اِس کو عدداً $\frac{\text{م}}{۳۶۶٫۲۴}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{1}{2}}$ سے بڑا کر سکے۔

۶۳۔ ہیئتی گھڑی کی تصحیح۔

ہیئتی گھڑی کی تصحیح معلوم کرنے کا عملی طریقہ اپنی سادہ ترین شکل میں حسب ذیل ہے۔

الفیمرس سے ہر دسویں دن کے لیے سیکڑوں بنیادی ستاروں کے ظاہری صعود مستقیم معلوم ہوتے ہیں یہ ستارے سماوات میں اس طرح پھیلے ہوئے ہوتے ہیں کہ ہر جگہ اور ہر ساعت اِن میں سے ایک یا زیادہ ستارے

نصف النہار کے قریب آ رہے ہوتے ہیں۔ گھڑی کی تصحیح اس طرح حاصل کیجاتی ہے کہ نصف النہار پر ستارہ کے مُرور کا وقت گھڑی میں دیکھ لیا جاتا ہے اور اس وقت کو ستارے کے اُس صعود مستقیم میں سے تفریق کیا جاتا ہے جو الفیمرس سے ادراج کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے تصحیح مثبت ہوگی اگر گھڑی سُست ہو کیونکہ اس صورت میں اصلی وقت حاصل کرنے کے لیے گھڑی سے مشاہدہ کردہ وقت میں عمل جمع کرنا ہوگا۔ اگر گھڑی تیز ہو تو تصحیح منفی ہوگی۔ (۲۰۲)

مثلاً فرض کرو کہ ستارہ النہر (بہ) (Eridani) کے مُرور کا مشاہدہ بتاریخ ۱۰ فروری ۱۹۱۰ء کیا گیا اور تمام ضروری تصحیحات کے بعد حسب ذیل امور معلوم ہوئے:-

	گ	م	ش
النہر (بہ) کے مُرور کا وقت گھڑی سے	۵	۳	۶ء۲۴
النہر (بہ) کا ظاہری صعود مستقیم الفیمرس سے	۵	۳	۶ء۲۵
گھڑی کی تصحیح	—	-	۰ء۱۷

پس اگر گھڑی کی کسی قرارت میں تصحیح ۔ء۱۷ش کی جائے تو متناظر صحیح وقت حاصل ہو جائے گا۔ مثلاً راس الحمل جس آن نصف النہار پر ہوگا اُس وقت اس گھڑی سے گ م ش وقت معلوم ہونے کی بجائے گ م ۔ء۱۷ش وقت ہوگا۔ اِس سے زیادہ صحت حاصل کرنے کے لیے اُن تصحیحات کا اوسط استعمال کرنا چاہیے جو متعدد بنیادی ستاروں کے اوقات مُرور سے ماخوذ ہوں۔

گھڑی کی شرح تصحیحات کا مقابلہ کرنے سے جو مناسب وقفوں سے معلوم کئے گئے ہوں معلوم ہوتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ

تاریخ ۱۴ر جون ۲۰گ ک۔و (کوکبی وقت) تصحیح + ۶۴ء۱۸ش ہے
" ۱۵ر " ۲۱ " " " + ۸۰ء۲۰ش ہے

اس لیے گھڑی اس وقفہ میں جس شرح سے وقت ضائع کررہی ہے

وہ $\frac{۲۴}{۲۵} \times ۲{,}۱۶ = ۲{,}۰۷$ ثانیے فی یوم ہے ۔

جب گھڑی کی شرح معلوم ہوتی ہے تو دو ستاروں کے صعود مستقیموں کا فرق ان کے اوقات مرور کے فرق کا مشاہدہ کرنے سے اور پھر اس وقفہ میں گھڑی کی شرح کے لیے جو تصحیح حاصل ہوی ہے اس کو عائد کرنے سے معلوم کیا جاتا ہے ۔

اِس طرح اگر صرف ایک جرم سماوی کا ہی صعود مستقیم معلوم ہو تو ہم دوسرے اجرام سماوی کے صعود مستقیم بعض شرائط کے تحت متعین کرسکتے ہیں ۔ اس لیے اب صرف یہ دکھانا ہے کہ ایک واحد بنیادی صعود مستقیم کس طرح حاصل کیا جاتا ہے ' اب چونکہ ♈ کا محل سورج کی حرکت سے معلوم ہوجاتا ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ سورج ہی وہ جسم ہونا چاہیے جس کا مشاہدہ اس مقصد کے لیے کیا جائے ۔

اگر طریق الشمس کا میلان سہ ہو اور سورج کا صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہو جہاں سورج کے مرکز کو طریق الشمس میں فرض کیا گیا ہے تو

جب عہ = مس ضہ مم سہ .... (۱)

ہم مان لیں گے کہ سہ معلوم ہے (دفعہ ۶۴) اور ضہ کا مشاہدہ کیا جاچکا ہے پھر اس مساوات سے عہ محسوب کیا جاسکتا ہے ۔ اگر مرور کا وقت تہ ہو جو ہیئتی گھڑی سے مشاہدہ کیا گیا ہے تو گھڑی کی خطا عہ ۔ تہ معلوم ہوجاتی ہے (۲۰۴)

اِس عمل کی تمثیل کے لیے ہم حسب ذیل صورت لے سکتے ہیں :۔

فرض کرو کہ گرینوچ کے نصف النہار پر بتاریخ ۲۸ مارچ ۱۹۰۹ء سورج کے مرور کا وقت گھڑی سے $۰^{گ}\ ۲۶^{د}\ ۲۲{,}۴۹^{ث}$ معلوم ہوتا ہے اور سورج کے مرکز کا مشاہدہ کردہ میل $۲^{\circ}\ ۵۱'\ ۱۳{,}۱''$ ش ہے ۔ طریق الشمس کا میلان $۲۳^{\circ}\ ۲۷'\ ۱۱{,}۶''$ معلوم ہے اور ہم گھڑی کی تصحیح معلوم کرنا چاہتے ہیں ۔ مرور پر سورج کا صعود مستقیم ضابطہ (۱) سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر حساب کا عمل

حسب ذیل ہے :-

ل مس ۲° ۵۱′ ۱۳٫۱″ ۸٫۶۹۷۱۳۵۷

لوک مم ۲۳ ۲۷ ۱٫۹ ۰٫۳۶۲۷۰۰۲

ل جب گ ۳۶م ۲۱٫۷ش = ۹٫۰۵۹۸۳۵۹

اِس لیے گھڑی کی تصحیح ہے

گ ۲۶م ۲۱٫۷ش − (گ ۲۶م ۴۹٫۲ش) = −۲۷٫۵ش

گھڑی کے کسی وقت میں یہ تصحیح کرنے سے اور گھڑی کی شرح (جسے مستقل مان لیا گیا ہے) کی رعایت رکھنے سے متناظر اصل کوکبی وقت معلوم ہو جاتا ہے۔

کسی ستارہ کا صعود مستقیم معلوم کرنے کے حسب ذیل طریقہ میں ہم فرض کریں گے کہ استقبال اور کبو کے اثرات کا لحاظ رکھا جا چکا ہے۔

فرض کرو کہ ایک ستارہ کا نا معلوم صعود مستقیم عہ ہے اور کسی دن کسی مقام پر ت$_1$ کوکبی وقت کا وہ وقفہ ہے جو سورج کے مُرور کے بعد سے ستارہ کے مُرور تک گذرتا ہے۔ اِس لیے سورج کا صعود مستقیم عہ − ت$_1$ ہے اگر اس کا میل ضہ$_1$ ہو اور طریق الشمس کا میلان سہ ہو تو

جب (عہ − ت$_1$) = مس ضہ$_1$ مم سہ .... (۲)

اثنائے سال میں کسی دوسرے موقع پر فرض کرو کہ سورج کا میل ضہ$_2$ ہے اور اس کا مُرور ستارہ کے مُرور سے وقت ت$_2$ قبل واقع ہوا ہے تو

جب (عہ − ت$_2$) = مس ضہ$_2$ مم سہ′ .... (۳)

اِن مساواتوں کو تفریق کرنے سے اور پھر جمع کرنے سے ہم بہ آسانی اخذ کرتے ہیں

مم {عہ − $\frac{1}{2}$ (ت$_1$ + ت$_2$)} = مم $\frac{1}{2}$ (ت$_2$ − ت$_1$) جب (ضہ$_1$ − ضہ$_2$) قم (ضہ$_1$ + ضہ$_2$)′ ...(۴)

پس ضہ$_1$ اور ضہ$_2$ کا اور وقت کے وقفوں ت$_1$ اور ت$_2$ کا مشاہدہ کرنے سے

عہ معلوم کرنے کے ذرایع حاصل ہوتے ہیں اگرچہ سہ کی قیمت پہلے سے نا معلوم ہو۔

مثال ۱۔ اگر ہیئتی گھڑی کی تصحیح گھڑی کے وقت ت پر ع ہو (۲۰۵)
اور اگر گھڑی فی دن رثانئے تیز ہو تو ثابت کرو کہ اصلی وقت حاصل کرنے کے لیے گھڑی کے کسی وقت ت میں جو تصحیح عائد کرنی ہوگی وہ ع۔ر(ت۔ت) /۲۴ ہے جہاں ت اور ت گھنٹوں میں بیان کئے گئے ہیں۔

مثال ۲۔ اوسط وقت کی ایک گھڑی کے رقاص کے وسط میں ایک چھوٹا سا شیلف (Shelf) لگایا گیا ہے جس پر چند چھوٹی مساوی کمیتیں ہیں جن میں سے ہر ایک ٹھیک اس قدر وزنی ہے کہ ان کی تعداد میں ایک کے اضافہ سے گھڑی کی شرح میں ایک ثانیہ یومیہ کا اضافہ ہوتا ہے۔ یہ انتظام کیا گیا ہے کہ ان کمیتوں کی کوئی چھوٹی تعداد شیلف پر رکھی جاسکتی ہے یا شیلف سے جدا کیجا سکتی ہے جبکہ گھڑی چل رہی ہو اور اس سے گھڑی کی حرکت میں خلل واقع نہیں ہوتا۔

اگر کل بوقت ظہر گھڑی کی تصحیح ع تھی اور آج بوقت ظہر ع۲ ہے تو ثابت کرو کہ کمیتوں کی وہ تعداد جو شیلف پر رکھنی ہوگی تاکہ کل بوقت ظہر گھڑی ٹھیک وقت بتلائے ۲ع۲ ۔ ع۱ ہے۔

مثال ۳۔ بتاریخ ۲۵ مارچ ۱۹۰۸ء سورج نصف النہار کو جبار (عہ) (Orionis) سے ۵گ ۳۴م ۴۰ش قبل عبور کرتا ہے اور بتاریخ ۲۷ ستمبر سورج نصف النہار کو جبار (عہ) کے ۵گ ۴۷م ۲۸ش بعد عبور کرتا ہے۔ ان تاریخوں میں سورج کے میل علی الترتیب + ۱° ۴۰′ ۲۷″ اور + ۲° ۲۴′ ۳۷″ ہیں۔

ثابت کرو کہ جبار (عہ) کا صعود مستقیم تقریباً ۵گ ۵۰م ۱۴ش ہے۔

۶۴۔ طریق الشمس کا میلان۔ طریق الشمس کا میلان

(دیکھو صفحہ ۲۸۸) تقریباً انقلاب کے وقت سورج کے میل کی پیمائش سے معلوم کیا جاتا ہے۔ اگر یہ پیمائش انقلاب کے وقت عمل میں آسکے تو میلان اس پیمائش کردہ میل کے مساوی ہوگا۔ لیکن عین انقلاب کے وقت سورج کے میل کا مُشاہدہ کرنا بالعموم عملاً آسان نہیں ہے۔ اس لیے غور طلب سوال یہ ہے کہ یہ میلان کس طرح حاصل کیا جاتا ہے جبکہ سورج کے میل کا مشاہدہ انقلاب کے قریب زمانہ میں کیا جائے اور صعود مستقیم معلوم ہو۔

دفعہ ماسبق کی بموجب

مس سہ = مس ضہ قم عہ ، .... (۱)

پہلی نظر میں یہ دکھائی دیگا کہ سہ کی تعیین کے لیے جبکہ ضہ اور عہ دیئے گئے ہوں اس سے زیادہ سادہ ضابطہ ہو نہیں سکتا۔ لیکن ہم بتائیں گے کہ اعمال حساب کے لیے اس سے زیادہ عملاً مفید ضابطہ حاصل کیا جاسکتا ہے اگرچہ اس کی شکل زیادہ پیچیدہ ہے اور گو وہ صرف ایک تقریبی ضابطہ ہے اور مندرجۂ بالا ضابطہ (۱) بالکل ٹھیک ہے۔

انقلاب گرما کے لیے ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

مس (سہ ـ ضہ) = مس ضہ (۱ ـ جب عہ) / (جب عہ + مس^۲ ضہ)

= جب ضہ جم ضہ (۱ ـ جب عہ)، کیونکہ جب عہ تقریباً ایک ہے

اس لیے سہ ـ ضہ = جب ۲ ضہ جب^۲ (۴۵° ـ ۱/۲ عہ) قم ۱″ ، ..... (۲)

(۲۰۶) یہ وہ خاص ضابطہ ہے جو اس عمل حساب میں استعمال ہونا چاہیئے کیونکہ ضابطہ (۲) میں ہم سہ کو محسوب نہیں کر رہے ہیں بلکہ سہ ـ ضہ کو، اور چونکہ سہ قریب قریب ضہ کے مساوی ہے اس لیے صرف چھوٹی مقدار سہ ـ ضہ کو محسوب کرنا ہوتا ہے۔ اس کی تشریح ایک خاص صورت کے لیے کی جائے گی۔

بتاریخ ۲۲ جون سنہ ۱۹۰۹ء سورج کا ظاہری میل بمقام گرینوچ بوقت

ظاہری ظہر ۲۳° ۲۷′ ۳۱ء۳″ ہے۔ اِس کا صعود مستقیم ۶گ ۱م ۲۹ء۴۳ش (= ۹۰° ۲۸′ ۳۵ء۹″) ہے۔ اب ہم سہ ــ ضہ کو ضابطہ (۲) سے محسوب کرتے ہیں اور لوکارتموں میں اعشاریہ کے صرف تین مقامات استعمال کرتے ہیں۔

ل جب ۲ ضہ　　= ۹٫۸۶۳

ل جب (۴۵° − ½ عہ) = ۷٫۵۷۴(ن)

〃　　= ۷٫۵۷۴(ن)

لوک قم آ　　= ۵٫۳۱۴

لوک (سہ ــ ضہ)　　= ۰٫۳۲۵　　سہ ــ ضہ = +۲ء۱۱″

سہ = ۲۳° ۲۷′ ۳۳ء۴″

لوکارتموں میں تین سے زیادہ ہندسوں کے استعمال میں کوئی فائدہ نہیں ہے کیونکہ بقیہ ہندسوں کو ترک کرنے سے سہ میں ۱ء۰″ کا فرق کسی حال نہیں ہو سکتا۔ یہ بھی واضح ہے کہ ضہ کو صرف قریب ترین منٹ تک لینا کافی ہے جبکہ لوک جب ۲ ضہ کو لکھا جا رہا ہو۔

اگر ہم سہ کو ضابطہ (۱) میں تین ہندسی لوکارتم استعمال کر کے معلوم کرنے کی کوشش کرتے تو حاصل ہوتا

ل مس ضہ = ۹٫۶۳۷

ل جب عہ = ۰٫۰۰۰

ل مس سہ = ۹٫۶۳۷

جس سے یہ ظاہر ہے کہ سہ، ۲۳° ۲۴′ ۴۸″ اور ۲۳° ۲۷′ ۲″ کے درمیان کوئی زاویہ ہو سکتا ہے۔ اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ضابطہ (۲) سے سہ کی قیمت ۱ء۰″ تک صحیح ملتی ہے اور برخلاف اِس کے ضابطہ (۱) سے سہ کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ تقریباً ۳′ تک غلط ہو سکتی ہے حالانکہ ہر صورت میں لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی ایک ہی تعداد

استعمال کی گئی ہے ۔ چند مزید آزمائشوں سے یہ معلوم ہوگا کہ تین ہندسی لوکارتموں کو تقریبی ضابطہ (۲) میں استعمال کرنے سے فی الواقعی ایک زیادہ صحیح نتیجہ حاصل ہوتا ہے بہ نسبت اس کے کہ ٹھیک ضابطہ (۱) میں ۴، ۵، یا ٦ ہندسی لوکارتم بھی استعمال کئے جائیں اور یہ بات صحیح ہے باوجود اس کے کہ ضابطہ (۲)، ضابطہ (۱) سے ماخوذ ہے ۔

بلاشبہ ضابطہ (۱) سے صحیح نتیجہ حاصل ہوگا اگر لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی کافی تعداد استعمال کی جائے ۔ مثلاً ۷ ہندسے استعمال کرنے سے

لوک مس ضہ = ٩،٦٣٧٢٨٩٥

لوک جب عہ = ٩،٩٩٩٩٨٧٨

لوک مس سہ = ٩،٦٣٧٣٠١٧

اور اس سے صحیح نتیجہ سہ = ٢٣° ٢٧′ ١٤٫٦″ حاصل ہوتا ہے ۔ لیکن یہ بغیر بینی ادراج کے حاصل نہیں ہو سکتا اگرچہ ہم بیگے (Begay) کی جدولیں استعمال کریں جن میں مثلثی تفاعلوں کے لوکارتم قوس کے ہر ثانیہ کے لیے درج ہیں ۔ (۲۰۷)

نہ صرف طریق الشمس کے میلان کی تعئین کے سلسلہ میں بلکہ دیگر ہیئتی مسئلوں میں بھی جن میں ایک نامعلوم مقدار کی تلاش کی جاتی ہے اور جن میں عمل حساب کے لیے سب سے زیادہ موزوں ضابطہ کا انتخاب کرنا ہوتا ہے نکتہ مشرح الصدر نہایت اہم ہے ۔

بالعموم ہمیں ایسا ضابطہ منتخب کرنا چاہئے جس سے ضابطہ (۲) کی طرح ایک ایسا جملہ ملے جو نامعلوم مقدار کی ٹھیک قیمت کو تعبیر نہ کرے بلکہ نامعلوم مقدار اور ایک معلومہ تقریبی قیمت کے درمیانی فرق کو ظاہر کرے ۔ جب ایسا ضابطہ مل جائے تو عمل حساب میں تکلیف دہ بینی ادراج سے بالعموم نجات مل سکتی ہے اور لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی تھوڑی تعداد کافی ہوتی ہے ۔

مثال ۱ — ثابت کرو کہ انقلاب سرما کے قریب زمانہ میں طریق الشمس کا میلان سہ ضابطہ سہ = ضہ + قم اَ جب ۲ ضہ جب^{۲} (۴۵° + $\frac{۱}{۲}$ عہ) سے حاصل ہوتا ہے جہاں سورج کا صعود مستقیم عہ ہے اور جنوبی میل ضہ۔ نیز اس ضابطہ کو یہ ثابت کرنے میں استعمال کرو کہ جس وقت ضہ = ۲۳° ۲۶′ ۵۸٫۲″ ج اور عہ = ۱۷ گ ۵۷ م ۴۷٫۹۸ ش (۲۲ر دسمبر سنہ ۱۹۰۷ء) تو طریق الشمس کا میلان

۲۳° ۲۷′ ۱٫۹″ ہے۔

مثال ۲ — حسب ذیل مُشاہدہ اور مفروضات سے ثابت کرو کہ بتاریخ یکم جنوری سنہ ۱۸۹۳ء طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۷′ ۱۱٫۳۶″ تھا۔

مشاہدہ :-

○ (سورج) کا ظاہری میل بتاریخ ۱۹ر جون سنہ ۱۸۹۳ء بوقت ظاہری ظہر ۲۳° ۲۶′ ۴۲٫۹۰″ ش

بحری جنتری سے ماخوذ:- ○ کا ظاہری صعود مستقیم بتاریخ ۱۹ر جون سنہ ۱۸۹۳ء بوقت ظاہری ظہر ۵ گ ۵۲ م ۵۲٫۱۱ ش

○ کا ظاہری عرض بلد بتاریخ ۱۹ر جون ۰٫۴۵″ ش

میلان میں کبو بتاریخ ۱۹ر جون + ۷٫۲۷۳″

میلان میں قرنی تبدیلی سالانہ — ۰٫۴۷۶″

سیاروی اختلال (perturbations) کی باعث زمین تھوڑی حد تک کبھی تو طریق الشمس کی ایک جانب اور کبھی دوسری جانب ڈگمگاتی ہے، اس لیے سورج کا مرکز ظاہراً ایک چھوٹا عرض بلد بہ رکھتا ہے جو اگرچہ بالعموم نظر انداز کیا جاتا ہے لیکن اس سوال میں محسوب کیا گیا ہے۔ سہ کی قیمت بتاریخ ۱۹ر جون بہ آسانی حاصل ہوتی ہے

سہ = ضہ − بہ جب سہ قم ضہ + جب ۲ ضہ جب^{۲} (۴۵° − $\frac{۱}{۲}$ عہ) قم اَ

اس میں دی ہوئی قیمتیں درج کرنے سے

س = ۲۳° ۲۶′ ۱۹٫۰۲″ + ۴۵٫۹۵″ = ۲۳° ۲۷′ ۰۵٫۱۸″

اب چونکہ میلان میں کبو + ۳٫۷۶″ اور میلان کی قرنی تبدیلی نصف سال کے لیے - ۲۴٫۲۶″ ہے اس لئے س کی محصلہ بالا قیمت میں تصحیحات - ۳٫۷۶″ اور + ۲۴٫۲۶″ عمل میں لانے سے آغاز سال پر اوسط میلان ۲۳° ۲۶′ ۳۶٫۱۱″ حاصل ہوتا ہے اور یہی مطلوب تھا۔

مثال ۳ — اگر سورج کا مشاہدہ کردہ صعود مستقیم ۹۰° - ع ہو اور اسکا میل ض ہو تو طریق شمس کے میلان کی تعیین کے لیے حسب ذیل ضابطہ انقلاب کے قریب مشاہدات سے معلوم کرو:۔

$$\text{س} - \text{ض} = \frac{\text{مس}^2 \frac{\text{ع}}{2}}{\text{جب } 1''}\ \text{جب } 2\text{س} - \frac{\text{مس}^4 \frac{\text{ع}}{2}}{2\ \text{جب } 1''}\ \text{جب } 4\text{س} + \ldots$$

جہاں س مطلوبہ میلان ہے اور س - ض کی پیمائش ثانیوں میں ہوئی ہے۔

حسب ذیل سوالات پر جو ضابطہ بالا سے پیدا ہوتے ہیں احتیاط کے ساتھ غور کرو:۔

(۱) ع کی تعیین کے لیے راس الحمل کا محل معلوم ہونا ضروری ہے۔

(۲) سورج کے چھوٹے عرض بلد کی وجہ سے ض میں تصحیح کرنی ہوگی۔

(۳) مطلوبہ مقدار س بائیں جانب آئی ہے۔ [Coll. Exam]

۶۵ — صعود مستقیم کی تعیین میں جتنی صحت ممکن ہے اسکی تخمین

اُس مبداء کی تعیین میں جس سے صعود مستقیم ناپے جاتے ہیں جس حد تک صحت حاصل ہو سکتی ہے اس کا امتحان کرنا مفید ہے۔

اول فرض کرو کہ میل کی مشاہدہ کردہ قیمتوں سے سورج کا صعود مستقیم محسوب کرنے میں طریق شمس کے میلان کی قیمت میں مف س کی خطا تھی۔ مساوات جب ع = مس ض مم س کو تفرق کرنے اور ض کو مستقل سمجھنے سے

جم عہ مف عہ = ـ مس ضہ قم² سہ مف سہ

یا

مف عہ = ـ ۲ مس عہ قم² سہ مف سہ

اِس میں سہ کی تقریبی قیمت ۲۳° ۲۷′ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

مف عہ = ـ ۰٫۴۴ ۲ مس عہ مف سہ

پس اِس سے ظاہر ہے کہ جہاں تک ممکن ہو اعتدال کے قریب مُشاہدات لینے چاہئیں۔ مف سہ کی قیمت دی ہوئی ہو تو عہ کے ساتھ مف عہ بھی بڑھتا ہے۔

اب چونکہ ہم چاہتے ہیں کہ مف سہ، عہ پر کم سے کم ممکن اثر ڈالے اِس لیے عہ اتنا چھوٹا ہونا چاہئے جتنا ممکن ہو۔

فرض کرو کہ میلان کی اختیار کردہ قیمت میں قوس کے ایک ثانیہ کی حد تک غلطی ہے تو مف سہ = ۱″ اور اگر اِس خطا سے عہ میں وقت کے لا ثانیوں کی خطا پیدا ہو تو مف عہ = ۱۵ لا، اِس لیے

لا = ـ ۰٫۱۸۳ ث مس عہ

پس اگر صعود مستقیم کو ۰٫۱ ث کے اندر تک صحیح حاصل کرنا ہے تو مس عہ > ۰٫۵۴۸ یا عہ > ۱ گ ۵۴′۔ سورج کا یہ صعود مستقیم بتاریخ ۲۰ اپریل واقع ہوتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اعتدال سے تقریباً ایک ماہ پیشتر یا ایک ماہ بعد تک اِس طریقہ پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے تاکہ ۷ کا محل ثانیہ کے دسویں حصہ تک صحیح حاصل ہو، بشرطیکہ طریق الشمس کے میلان کی مفروضہ قیمت قوس کے ایک ثانیہ کے اندر تک صحیح معلوم ہو۔ بلا شبہ یہاں یہ تسلیم کرلیا گیا ہے کہ میل کی مشاہدہ کردہ قیمت میں کوئی خطا نہیں ہے۔ (۲۰۹)

اب ہمیں یہ غور کرنا چاہئے کہ مُشاہدہ کردہ میل میں خطا ہو تو اس خطا کا کیا اثر سورج کے صعود مستقیم کی محسوبہ قیمت پر پڑے گا۔

مساوات جیب عہ = مس ضہ مم سہ کو بلحاظ عہ اور ضہ کے تفرق کرنے اور سہ کو مستقل سمجھنے سے حاصل ہوتا ہے

مف عہ = قط عہ قط² ضہ مم سہ مف ضہ

اِس کو شکل

مف عہ = قط عہ (۱ + جب۲ عہ سس۲ سہ) مم سہ مف ضہ

میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ ضہ پیمائش سے معلوم کیا جا سکتا ہے اس لیے مشاہدات کی ترتیب میں احتیاط برتنی چاہئے تاکہ کوئی خطا مف ضہ (اور ظاہر ہے کہ ایسی خطائیں ناگزیر ہیں) غیر مناسب طور پہ عہ کو متاثر نہ کرے۔ جزو ضربی مم سہ مستقل ہے اور چونکہ سورج کا میل ۲۴° سے ہرگز متجاوز نہیں ہوتا اس لیے قط۲ ضہ میں کوئی بڑے تغیرات نہیں ہوں گے لیکن چونکہ قط عہ کی ۱ سے ∞ تک کوئی قیمت ہو سکتی ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ مف عہ کو حتی الامکان چھوٹا رکھنے کے لیے قط عہ کو اس کی قلیل ترین قیمت پر رکھنا چاہئے یعنے عہ تقریباً صفر یا ۱۸۰° ہونا چاہئے اور اس لیے سورج ♈ یا ♎ کے قریب ہونا چاہئے اور اس لیے مشاہدات اعتدال ربیع یا اعتدال خریف کے قریب کرنے چاہئیں۔

سہ کی عددی قیمت درج کرنے سے ہم آسانی سے معلوم کرتے ہیں کہ مف عہ کی قیمتیں سورج کے مختلف صعود مستقیموں کے جواب میں حسب ذیل ہیں۔

سورج کا صعود مستقیم	مف عہ
۰گ	۲٫۳ مف ضہ
۲گ	۲٫۸ مف ضہ
۴گ	۵٫۳ مف ضہ

اور انقلاب پہ مف ضہ کا سر لامتناہی ہوگا۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اعتدالین میں سے ایک کے قریب مشاہدات کر کے خطاؤں کو اقل بنانا کس قدر ضروری ہے۔

اگر صعود مستقیم ثانیہ کے دسویں حصہ کے اندر مطلوب ہو تو مف عہ = ۱٫۰ش = ۵٫۱آ اور اس لیے وقت کے ایک ثانیہ کے دسویں حصہ کی خطا سورج کے میل کی تعئین میں ۶۵٫۰‴ کی خطا سے پیدا ہو سکتی ہے خواہ اعتدال کے قریب ہی مشاہدات کئے گئے ہوں۔

(۲۱۰)

۹۹ — کوکبی سال اور شمسی سال —

زمین کی گردش کی وجہ سے کسی ارضی مشاہد کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ سورج سال میں ایک مرتبہ سماوات کا ایک مکمل دور کرتا ہے — لفظ **سال** کو جو مختلف معنے پہنائے جا سکتے ہیں ان میں امتیاز کرنا ضروری ہے —

کوکبی سال وقت کا وہ وقفہ ہے جس میں سورج کا مرکز ستاروں کے حوالہ سے ایک پوری گردش کی تکمیل کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ صحیح ہوگا کہ کسی ایسے ستارہ کے حوالہ سے جو طریق الشمس میں واقع ہو اور ذاتی حرکت سے محروم ہو — کوکبی سال وہ مدت دوران (periodic time) بھی ہے جس میں زمین سورج کے گرد ایک کوکبی گردش کی تکمیل کرتی ہے جبکہ زمین کو نظام شمسی کا ایک سیارہ سمجھا جائے — زمان سنہ ۱۹۰۰ء میں کوکبی سال کی مدت ۳۶۵٫۲۵۶۴ اوسط شمسی یوم ہے —

شمسی (Tropical) **سال** وہ اوسط وقفہ ہے جو سورج کی راس الحمل تک دو متواتر واپسیوں کے درمیان ہوتا ہے — یہ نقطہ (راس الحمل) طریق الشمس پر استقبال کی وجہ سے حرکت کرتا ہے اور سالانہ ۵۰٫۲۵۶۴″ (نیوکومب) کی شرح (سنہ ۱۹۰۰ء) سے سورج سے ملنے بڑھتا ہے — پس شمسی سال، کوکبی سال سے بقدر نسبت ۵۰٫۲۵۶۴″ \ ۳۶۰° — ۳۶۰° کے چھوٹا ہے اور ۳۶۵٫۲۴۲۲ اوسط شمسی یوم کے مساوی ہے — ہم یہ ذکر کر چکے ہیں (دیکھو نوٹ صفحہ ۲۹۲) کہ ہیئتی عمل حساب میں شمسی سال کا آغاز اس آن سے ہوتا ہے جبکہ سورج کا اوسط طول بلد ٹھیک ۲۸۰° ہو، یہ سنہ ۱۹۱۰ء میں ۳۵٫۷ ؍ دن جنوری کے متناظر تھا —

کاروباری سال متعین کرنے میں شمسی سال کو بنیاد قرار دیا جاتا ہے نہ کہ کوکبی سال کو — جولین کیلنڈر کی بموجب شمسی سال کو ۳۶۵٫۲۵ دن

فرض کیا گیا تھا۔ یہ انتظام تھا کہ ہر چار متصل کاروباری سالوں میں تین سال تو ۳۶۵ دن فی سال کے حساب سے ہوں اور چوتھا سال یعنے وہ جو ۴ سے تقسیم پذیر ہے سال کبیسہ (Leap year) ہو اور اس سال فروری کے مہینہ میں ۲۹ فروری کا اضافہ ہو تاکہ یہ سال ۳۶۶ دن کا ہو جائے۔ اس انتظام سے اوسط کاروباری سال شمسی سال سے تقریباً ۱۱ منٹ بڑھ گیا۔

اوسط کاروباری سال اور شمسی سال میں زیادہ مطابقت پیدا کرنے کے لیے گریگوری کی تصحیح جولین کیالنڈر میں داخل کی گئی۔ اس تصحیح کی بموجب ہر چار صدیوں میں جولین قاعدے سے جتنے سال کبیسہ آتے ہیں ان میں سے تین سال معمولی ۳۶۵ دن کے متصور ہوتے ہیں۔ اگر سال کو تعبیر کرنے والا عدد دو صفروں پر ختم ہو تو وہ چونکہ ۴ سے تقسیم پذیر ہوتا ہے اس لیے جولین قاعدے کی بموجب بلاشبہ سال کبیسہ ہوگا۔ لیکن گریگوری کی تصحیح کی بموجب جو کیالنڈر مرتب ہوا ہو اس میں ایسا سال سال کبیسہ نہیں ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ سن کو تعبیر کرنے والے عدد کے پہلے دو ہندسے ۴ سے تقسیم پذیر ہوں مثلاً ۱۹۰۰، ۲۱۰۰، ۲۲۰۰، ۲۳۰۰ اگرچہ جولین سال کبیسہ ہیں گریگوری کے سال کبیسہ نہیں لیکن ۲۰۰۰ اور ۲۴۰۰ دونوں نظاموں میں سال کبیسہ ہیں۔ ہم وہ جولین کیالنڈر استعمال کرتے ہیں جس میں گریگوری کی تصحیح داخل کی گئی ہے۔ (۲۱۱)

پس موجودہ کیالنڈر میں ہر چار صدیوں میں ۹۷ سال کبیسہ ہوتے ہیں اور اس لیے چار صدیوں میں دنوں کی تعداد ۹۷+۳۶۵×۴۰۰ = ۱۴۶۰۹۷ ہوتی ہے۔ اس لیے کاروباری سال کا اوسط طول ہمارے موجودہ نظام کی بموجب ۳۶۵٫۲۴۲۵ دن ہے۔ یہ شمسی سال سے ۰٫۰۰۰۳ دن کے اندر تک مطابقت رکھتا ہے۔ یہ تقرب اس قدر صحیح ہے کہ چند ہزار سال تک ایک دن کی خطا بھی پیدا نہیں ہوگی۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی رصدگاہ میں ایک شمسی سال کے دوران میں راس الحمل کے بالائی تگبدوں کی تعداد (یعنے ۲ میں سے سورج کے دو متصلہ

عبوروں کے درمیان کوکبی ایام کی تعداد) اُسی رصدگاہ میں اُسی سال سورج کے بالائی تکبّدوں کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔

سال کے آغاز کے بعد ♈ کے پہلے مرور سے کچھ دیر کے بعد سورج کا تکبّد واقع ہونا چاہیے۔ ♈ کے دوسرے، تیسرے، چوتھے اور آئندہ تکبّدوں پر سورج روز بروز زیادہ پیچھے ہوتا جائے گا تاآنکہ جب سال قریب الختم ہوگا تو وہ تقریباً پورے محیط کے برابر پیچھے رہ جائے گا۔ پس سورج کے ن ویں تکبّد سے کچھ ہی قبل ♈ کا (ن + ۱) واں تکبّد واقع ہوگا۔ اگر سورج ♈ کو اس کا تکبّد واقع ہونے سے قبل ملالے تو سال مکمل ہوگا لیکن سورج کے تکبدوں کی تعداد ♈ کے تکبّدوں کی تعداد سے ایک کم ہوگی۔ اگر سورج ♈ کو عین اسوقت ملالے جبکہ ♈ کا تکبّد واقع ہو تو سال کے آخری لمحہ میں سورج اور ♈ دونوں کے تکبدوں کی تعداد میں ایک کا اضافہ ہوگا اور اس طرح پھر بھی سورج کے تکبدوں کی تعداد ایک کم ہوگی۔

مثال ۲ — کسی ملک میں سال کبیسہ کے لیے ذیل کا قاعدہ مروّج ہے:۔ اگر سال کے عدد کے آخر میں صفر ہوں تو صفروں کے اتنے زوج خارج کردو جتنے ممکن ہوں۔ تب اگر بقیہ عدد ۴ سے تقسیم پذیر ہو تو وہ سال سالِ کبیسہ ہوگا۔ دوسرے ملک میں حسب ذیل قاعدہ ہے:۔ سال کے عدد کو ۳۳ سے تقسیم کرو، تب اگر کوئی باقی حاصل ہو اور یہ باقی ۴ سے تقسیم پذیر ہو تو وہ سال کبیسہ ہوگا۔ ثابت کرو کہ اِن دو ملکوں میں گنتی میں ایک دن سے زیادہ کا فرق کبھی نہیں ہوگا۔

۳۳ متصلہ وقفوں میں جن میں سے ہر ایک ۴۰۰ سال کا ہو ایک اور صرف ایک وقفہ ایسا ہونا چاہیے جس کا آغاز ایسے سال سے ہوگا جس کا عدد ۳۳ سے تقسیم پذیر ہوگا۔ یہ سال سال کبیسہ نہیں ہوگا اور دوسرے ملک میں ۴۰۰ سال کے اِس وقفہ میں کبیسہ سالوں کی کل تعداد ۹۶ ہوگی اور اس طرح اِس میں ایک دن کم پڑ جائے گا۔ باقی ۳۲ وقفوں میں سے ہر وقفہ میں کبیسہ سالوں کی تعداد ۹۷ ہوگی۔ اِس لیے کل تعداد (۳۳ × ۴۰۰ =) ۱۳۲۰۰ سال میں ۳۳ × ۹۷ - ۱ ہوگی۔

پہلے ملک میں فی ۴۰۰ سال، کبیسہ سال تعداد میں بالعموم ۹۷ ہونگے لیکن ۱۳۲۰۰ سال کے وقفہ میں سوال میں دی ہوئی شرط کی بموجب سنہ ۱۳۲۰۰ سال کبیسہ نہیں ہوگا اور اس طرح یہاں بھی ایک دن کی کمی ہوجائے۔ اس لیے ہر ملک میں کبیسہ سالوں کی کل تعداد ہر ۱۳۲۰۰ سال کے وقفہ میں ۳۳×۹۷-۱ = ۳۲۰۰ ہوگی — پس ہم دیکھتے ہیں کہ ۱۳۲۰۰ سال کے ہر دور میں ان دو ملکوں میں سے ہر ملک میں کبیسہ سالوں کی تعداد ٹھیک ۳۲۰۰ ہوگی۔ (۲۱۲)

۶۷ — اوسط حرکت کا ہندسی اصول۔

ایک نقطہ پ ایک دائرہ کے محیط پر اس طرح حرکت کر رہا ہے (شکل ۶۳) کہ وقت ت پر زاویہ و ج پ (= ط) جس کی پیمائش ایک ثابت نصف قطر ج و سے ہوتی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے:-

$$\left.\begin{aligned} \text{ط} &= \text{ا} + \frac{2\pi\,\text{ت}}{\text{ت}_0} + \text{ا}_1\,\text{جب}\,\frac{2\pi\,\text{ت}}{\text{ت}_0} + \text{ب}_1\,\text{جم}\,\frac{2\pi\,\text{ت}}{\text{ت}_0} \\ &+ \text{ا}_2\,\text{جب}\,\frac{4\pi\,\text{ت}}{\text{ت}_0} + \text{ب}_2\,\text{جم}\,\frac{4\pi\,\text{ت}}{\text{ت}_0} \\ &+ \text{ا}_3\,\text{جب}\,\frac{6\pi\,\text{ت}}{\text{ت}_0} + \text{ب}_3\,\text{جم}\,\frac{6\pi\,\text{ت}}{\text{ت}_0} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

شکل (۶۳)

جہاں ا، ت، ا۱، ب۱، ا۲، ب۲، ا۳، ب۳ ...... مستقل ہیں۔
یہ جملہ ت کی رقوم میں ط کا بہت ہی عام جملہ ہے، اس کی ایک مخصوص صورت وقت کی رقوم میں سورج کے طول بلد کا ضابطہ ہے۔

اگر ت کی بجائے اس جملہ میں ت + ت. لکھا جائے تو ط، ط + ۲π ہو جاتا ہے یعنے پ اُس نقطہ پر واپس ہوتا ہے جہاں سے چلا تھا۔ اسلیے پ کی حرکت کی مدتِ دوران ت. ہے۔

ط کو بلحاظ ت کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \frac{2\pi}{\text{ت.}} + \frac{2\pi\,\text{ا}_1}{\text{ت.}}\,\text{جم}\,\frac{2\pi\,\text{ت}}{\text{ت.}} - \frac{2\pi\,\text{ب}_1}{\text{ت.}}\,\text{جب}\,\frac{2\pi\,\text{ت}}{\text{ت.}} + \frac{4\pi\,\text{ا}_2}{\text{ت.}}\,\text{جم}\,\frac{4\pi\,\text{ت}}{\text{ت.}} - \frac{4\pi\,\text{ب}_2}{\text{ت.}}\,\text{جب}\,\frac{4\pi\,\text{ت}}{\text{ت.}} \cdots \quad (۲)$$

(۲۱۳) یہ جملہ ایسا ہے کہ اس میں ت کی بجائے ت + ت. رکھنے سے تغیر واقع نہیں ہوتا۔ اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک دَور میں نقطہ پ اگر رفتار و سے کسی نقطہ لا میں سے گذرے تو وہ ہر دَور میں نقطہ لا میں سے اُسی رفتار و سے گذرے گا۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی دو دَور ہر حیثیت سے ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ نہ صرف ہر دَور میں وہی وقت لگتا ہے بلکہ ہر نقطہ پر ہر دَور میں فی الواقعی وہی رفتار رہتی ہے۔

$\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$ کے جملہ کا وہ حصہ یعنی $\frac{2\pi}{\text{ت.}}$ جو مثلثی تفاعلوں کو ترک کرنے سے حاصل ہوتا ہے اوسط زاویٔی رفتار کہلاتا ہے۔ فرض کرو کہ

پ. ایک نقطہ ہے جو دائرہ کے گرد یکساں طور پر زاویٔی رفتار $\frac{2\pi}{\text{ت.}}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور اس لیے ہر لمحہ پر ج پ. ثابت نصف قطر ج و کے ساتھ زاویہ ا + ۲π ث / ت. بناتا ہے، تب اوسط محل پ.

اور اصلی محل پ کے حسب ذیل خواص حاصل ہوتے ہیں :-

(۱) پ اور پ۰ کی دَوری مدّتیں مماثل ہوتی ہیں

(۲) پ اور پ۰ کے درمیان فاصلہ کبھی ایک خاص معیّن حد سے بڑھ نہیں سکتا -

(۳) پ اور پ۰ کے درمیان اوسط فرق ایک پورے دَور کے اثنا میں صفر ہوتا ہے -

(۱) ظاہر ہے کیونکہ دَوری مدتوں میں سے ہر ایک ت۰ ہے -

(۲) حاصل ہوتا ہے کیونکہ پ اور پ۰ کے درمیان فرق کبھی مجموعہ

$$\pm ا_1 \pm ا_2 \pm ا_3 \pm ب_1 \pm ب_2 \pm ب_3 + \dots$$ سے تجاوز

نہیں ہو سکتا جہاں ہر علامت اس طور پر لی جاتی ہے کہ متناظر رقم مثبت ہو۔

(۳) بھی صحیح ہے کیونکہ جب کبھی ن ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے تو

$$\int_{0}^{ت_0} جب \frac{2 ن \pi ت}{ت_0} فرت = 0 \quad اور \quad \int_{0}^{ت_0} جم \frac{2 ن \pi ت}{ت_0} فرت = 0$$

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم پ۰ کے محل کو تعبیر کرنے والے زاویہ کو متناظر زاویہ طہ میں سے تفریق کریں تو اس فرق کی اوسط قیمت صفر ہے کیونکہ اس فرق میں صرف دَوری رقمیں شامل ہوتی ہیں اور ان میں سے ہر ایک کی اوسط قیمت صفر ہے -

پس یہ نتیجہ نکلا کہ پ۰ دائرہ کے گرد یکساں طور پر حرکت کرنے میں بعض اوقات پ سے آگے ہوتا ہے اور بعض اوقات اس کے پیچھے اور اوسطاً پ۰ پ سے عین اتنا ہی آگے ہوگا جتنا پیچھے، اسلیے پ۰ کی حرکت کو بجا طور پر پ کی اوسط حرکت کہا جا سکتا ہے - ہم پ کی اصلی حرکت کو اوسط مقام پ۰ کے گرد ایک اہتزازی حرکت سمجھ سکتے ہیں۔

(۲۱۴) مثال ۱ - اگر اوقات ۰، ت۰/۶، ۲ ت۰/۶، ۳ ت۰/۶، ۴ ت۰/۶، ۵ ت۰/۶ پر طہ کی قیمتیں علی الترتیب طہ۰، طہ۱، ... ، طہ۵ ہوں تو ثابت کرو کہ طہ کے

اس حصہ ا کے لیے جو ت پر منحصر نہیں ہے ذیل کا جملہ ملتا ہے :-

$$\text{ا}_{۰} = \tfrac{۱}{۶}(\text{ط}_{۰} + \text{ط}_{۱} + \text{ط}_{۲} + \text{ط}_{۳} + \text{ط}_{۴} + \text{ط}_{۵}) - ۱۵۰^{\circ}$$

اگر ا۴، ب۴ اور اعلیٰ تر رقمیں ترک کر دی جائیں۔

عام ضابطہ (۱) میں متواتر اندراج سے

$$\text{ط}_{۰} = \text{ا}_{۰} + \text{ب}_{۱} + \text{ب}_{۲} + \text{ب}_{۳}$$

$$\text{ط}_{۱} = \text{ا}_{۰} + ۹۰^{\circ} + \text{ا}_{۱}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} + \tfrac{\text{ب}_{۱}}{۲} + \text{ا}_{۲}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} - \tfrac{\text{ب}_{۲}}{۲} - \text{ب}_{۳}$$

$$\text{ط}_{۲} = \text{ا}_{۰} + ۱۲۰ + \text{ا}_{۱}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} - \tfrac{\text{ب}_{۱}}{۲} - \text{ا}_{۲}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} - \tfrac{\text{ب}_{۲}}{۲} + \text{ب}_{۳}$$

$$\text{ط}_{۳} = \text{ا}_{۰} + ۱۸۰ - \text{ب}_{۱} + \text{ب}_{۲} - \text{ب}_{۳}$$

$$\text{ط}_{۴} = \text{ا}_{۰} + ۲۴۰ - \text{ا}_{۱}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} - \tfrac{\text{ب}_{۱}}{۲} + \text{ا}_{۲}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} - \tfrac{\text{ب}_{۲}}{۲} + \text{ب}_{۳}$$

$$\text{ط}_{۵} = \text{ا}_{۰} + ۳۰۰ - \text{ا}_{۱}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} + \tfrac{\text{ب}_{۱}}{۲} - \text{ا}_{۲}\tfrac{\sqrt{۳}}{۲} - \tfrac{\text{ب}_{۲}}{۲} - \text{ب}_{۳}$$

اس لیے عمل جمع سے

$$\text{ا}_{۰} = \tfrac{۱}{۶}(\text{ط}_{۰} + \text{ط}_{۱} + \text{ط}_{۲} + \text{ط}_{۳} + \text{ط}_{۴} + \text{ط}_{۵}) - ۱۵۰^{\circ}$$

اس لیے اگر ہم ان چھ زمانوں پر جو گردش کے ایک پورے دور ت ب کو چھ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ط کی قیمتیں معلوم کر لیں تو ہم ا۰ کو معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ا۰ + ۲ π ت \ ت ب یعنے کسی وقت ت پر پ کا اوسط محل معلوم ہو جاتا ہے۔

مثال ۲:- بتاؤ کہ عام ضابطہ (۱) کس طرح مختصر ہو جاتا ہے اگر حرکت محور ج و کے گرد متشاکل ہو۔

اس صورت میں فرق ط \ فرق ت کی قیمت ت اور ت ب - ت کیلئے یکساں ہوگی اگر ت کو و میں سے مرور کے وقت سے ناپا جائے۔ اس لیے (۲) میں

درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ب۱ جب (۲π ت/تب) + ب۲ جب (۴π ت/تب)

+ ب۳ جب (۶π ت/تب) = ۰

یہ چونکہ ت کی سب قیمتوں کے لیے صحیح ہونا چاہیے اس لیے ب۱ = ب۲ = ب۳ = ۰ اور اس لیے ضابطہ (۱) ہو جاتا ہے

ط = ۲π ت/تب + ا۱ جب ۲π ت/تب + ا۲ جب ۴π ت/تب + ا۳ جب ۶π ت/تب

مثال ۳ — یہ مان کر کہ حرکت متشاکل ہے اور تشاکل کا محور وہ محور ہے جس سے ط ناپا جاتا ہے اور یہ کہ ا۲ اور اس سے اعلیٰ سر صفر سمجھے جا سکتے ہیں ثابت کرو کہ اگر ا۱ > ۲ ا۲ تو تین حقیقی نقطے ہوں گے جن میں پ کا اوسط محل اس کے اصلی محل پر منطبق ہوگا۔

مثال ۴ — بحری جنتری بابتہ سنہ ۱۹۰۹ء سے اوسط ظہر پر سورج کے ظاہری طول بلد کے لیے حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:۔

سنہ ۱۹۰۹ء اوسط ظہر	ظاہری طول بلد ☉ کا		
یکم جنوری	۲۸۰°	۲۸′	۱۶٫۱″
۲ر اپریل	۱۲	۶	۳۰٫۱۹
۲ر جولائی	۹۹	۵۵	۴۰٫۱۴
یکم اکتوبر	۱۸۷	۳۹	۲٫۱۲

ثابت کرو کہ سورج کا اوسط طول بلد ۲۸۰٫۴۹۹° + ۳۶۰° ت/تب ہے جہاں ت، اوسط شمسی ایام کی تعداد ہے جو یکم جنوری سنہ ۱۹۰۹ء اوسط ظہر سے گذر چکے ہیں اور جہاں تب، اوسط شمسی ایام میں شمسی سال کا طول ہے۔

ضابطہ (۱) کو استعمال کرنے میں اب ہم ا۲، ب۲ اور اعلیٰ رقموں کو

(۲۱۵)

نظرانداز کردیتے ہیں۔ دوری رقموں میں ہم کافی صحت کا لحاظ رکھتے ہوئے ت کو متواتر ۰، ۱/۴ ت، ۱/۲ ت، ۳/۴ ت بنا سکتے ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ آخری تین تاریخوں میں ظاہری طول بلدوں میں سے ہر ایک کو بقدر ۳۶۰° کے بڑھانا چاہئے۔ اس طرح ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

ا = ۲۸۰° ۲۸′ ۱٫۱″ + ب۱ + ب۲

۳۷۲ ۶ ۳۰٫۹ = ا + ۳۶۰° × ۹۱ / ت + ا۱ − ب۲

۴۵۹ ۵۵ ۴۰٫۴ = ا + ۳۶۰ × ۱۸۲ / ت − ب۱ + ب۲

۵۴۷ ۳۹ ۲۷٫۲ = ا + ۳۶۰ × ۲۷۳ / ت − ا۱ − ب۲

اس لیے جمع کرنے اور ت = ۳۶۵٫۲۴۲۲ رکھنے سے

۱۶۶۰° ۹′ ۳۹٫۶″ = ۴ا + ۵۳۸° ۹′ ۴۸٫۶″

اور اس لیے　ا = ۲۸۰٫۴۹۹°

سورج کے اوسط طول بلد کا روزانہ اضافہ ۰٫۹۸۵۶۵ ہے اور سال کے آغاز سے ۸۰٫۶۵۶ دنوں بعد یعنی بتاریخ ۲۲ مارچ اوسط طول بلد صفر ہے۔

اگر وہ متعدد چھوٹی رقمیں جو یہاں نظرانداز کی گئی ہیں ملحوظ رکھی جائیں تو سورج کا اوسط طول بلد حاصل ہوگا

۲۸۰°٫۴۹۹۴۲ + ۳۶۰° ت / ت

مثال ۵ — پچھلی مثال سے ثابت کرو کہ بتاریخ ۷ نومبر ۱۹۰۶ء سورج کا اوسط طول بلد ۲۲۶٫۰۵° ہے۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ سورج کا اوسط طول بلد بوقت ۰٫۴۹۳ جنوری ۱۹۰۹ء ۲۸۰° تھا اگر یہ دیا گیا ہو کہ سورج کا اوسط طول بلد بتاریخ یکم اپریل ۱۹۰۹ء ۹٫۲۰۷۶۸° ہے اور اس کا روزانہ اضافہ ۰٫۹۸۵۶۵° ہے۔

۶۸ — اوسط وقت

اگرچہ رصدگاہ کے خاص کام کے لیے کوکبی وقت کو استعمال کرنا

لازمی ہے تاہم یہ ظاہر ہے کہ ہئیتی گھڑی کاروباری زندگی کے معمولی مقاصد کو پورا نہیں کرے گی ۔ اس آخری غرض کے لیے ایک ایسا دن چاہئیے جس کا طول ستاروں کے ذریعہ نہیں بلکہ سورج کے ذریعہ ناپا گیا ہو ۔ اس لیے ہم اپنے معمولی وقت کی پیمائش کے لیے وہ دن استعمال کرتے ہیں جو اوسط شمسی یوم کے نام سے مشہور ہے ۔

اب چونکہ سورج کی حرکت صعود مستقیم میں یکساں نہیں ہے اس لیے نصف النہار پر سورج کی دو متواتر واپسیوں کے درمیان وقفہ مستقل نہیں ہے تمثیلاً ہم یہاں شمسی یوم کا کوکبی طول پورے سال ۱۹۰۹ء کے چار متساوی الفصل تاریخوں پر دیتے ہیں ۔

سنہ ۱۹۰۹ء

	کوکبی گ	م	ش
ظاہری ظہر یکم جنوری سے ظاہری ظہر دوسری جنوری تک	۲۴	۴	۲۴،۹
" ۲ ، اپریل سے " ۳ ، اپریل تک	۲۴	۳	۳۸،۵
" ۳ ، جولائی سے " ۴ ، جولائی تک	۲۴	۴	۷،۵
" ۲ ، اکتوبر سے " ۳ " "	۲۴	۳	۳۷،۶

(۲۱۹) اس جدول کی پہلی سطر سے یہ بیان ہوتا ہے کہ اگر وہ وقت جس پر سورج کا مرکز مشاہد کے نصف النہار کو عبور کرتا ہے یکم جنوری ۱۹۰۹ء کو ہئیتی گھڑی میں دیکھا جائے اور مشاہدے کو دوسرے دن دہرایا جائے تو یہ ہئیتی گھڑی (اگر اس کی شرح کے لیے رعایت رکھی جائے) سے یہ معلوم ہوگا کہ کوکبی وقت کے ۲۴گ ۴م ۲۴،۹ش کا وقفہ ان دو مروروں کے درمیان گذر چکا ہے ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ظاہری شمسی یوم جس کا آغاز یکم جنوری کی ظاہری ظہر سے ہوتا ہے اس شمسی یوم سے ۴۷،۳ کوکبی ثانئے زیادہ طویل ہے جس کا آغاز ۲ ، اکتوبر کی ظاہری ظہر سے ہوتا ہے ۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ ظاہری شمسی یوم کا طول سال تمام مستقل نہیں رہتا اور اس کے تغیرات یقیناً تین چوتھائی منٹ سے

متجاوز کرتے ہیں۔ ان بے قاعدگیوں کی وجہ سے شمسی یوم معمولی وقت کی پیمائش کے لیے موزوں اکائی نہیں ہے۔ ہم ایک اوسط شمسی یوم کو اکائی کے طور پر اختیار کرتے ہیں جس کا طول بہت سے سالوں کے ظاہری شمسی ایام کا اوسط وقفہ ہوتا ہے۔ اوپر کی فہرست بابتہ سنہ ۱۹۰۹ء میں چاردنوں کا اوسط وقفہ ۲۴ گ ۳ م ۱/۰۷ۛ ش ہے اور یہ اوسط شمسی یوم کی ایک تقریبی قیمت ہے۔

جب متصلہ ظاہری شمسی ایام کی ایک بہت بڑی تعداد کا اوسط لیا جاتا ہے تو یہ معلوم ہوا ہے کہ کوکبی وقت میں ایک شمسی یوم کا معادل ۲۴ گ ۳ م ۵۶٫۵۵۵ ش ہے۔

پیچیدگیوں سے بچنے کے لیے علماء ہیئت نے اس میں سہولت دیکھی ہے کہ ایک موہوم جسم (یا زیادہ صحیح طور پر ایک نقطہ) کا خیال کیا جائے جو ہر لمحہ خط استوا پر رہے اور اس کا ظاہری صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد کے مساوی ہو۔ اس موہوم جسم کو اوسط سورج کہتے ہیں۔ دفعہ ۸۷ میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ سورج کا ظاہری صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد اور دوری رقموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ پس سورج کے ظاہری صعود مستقیم اور اوسط سورج کے ظاہری صعود مستقیم میں صرف دوری رقموں کا فرق ہوتا ہے۔ اس لیے وقت کے ایک طویل وقفہ میں اصلی سورج اور اوسط سورج کے ظاہری صعود مستقیموں کا اوسط فرق صفر کی طرف مائل ہوگا۔ اگر ہم استقبال اور کبو کی وجہ سے خط استوا کی جو حرکت ہے اسے نظر انداز کرسکیں تو اوسط سورج کے متعلق یہ کہا جاسکتا ہے کہ وہ خط استوا میں اس طور پر یکساں حرکت کرتا ہے کہ ہر لمحہ اس کا صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد کے مساوی ہوتا ہے۔

جب اوسط سورج نصف النہار پر ہو تو وہ گھڑی جو مقامی اوسط وقت کو تعبیر کرتی ہے وقت ۰ گ ۰ د ۰ ش بتائے گی۔ پس اوسط وقت کی گھڑی سے جو وقت معلوم ہوگا وہ، نصف النہار سے اوسط سورج کے ساعتی زاویے کو

کسی آن پر ظاہر کرے گا۔ کاروباری مقاصد کے لیے دن کا آغاز نیم شب سے ہوتا ہے اور گھنٹے ۱ گ سے ۱۲ گ (ظہر) تک اور پھر ۱ گ سے ۱۲ گ (نیم شب) تک گنے جاتے ہیں، اول الذکر گھنٹوں کو انگریزی میں حروف A . M سے اور آخر الذکر کو حروف P . M سے تمیز کیا جاتا ہے اور ہم انہیں علی الترتیب ب ۔ ن (بعد نیم شب) اور ب ۔ ظ (بعد ظہر) سے تمیز کریں گے۔ ہیئتی گنتی میں دن ظہر سے ظہر تک لیا جاتا ہے، ظہر کو ۰ گ کہتے ہیں اور بعد کے گھنٹے علی التسلسل ۲۴ گ تک گنے جاتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ حسب ذیل مفروضات سے کوکبی وقت میں اوسط شمسی یوم کا طول معلوم کرو۔

بتاریخ ۴۔ جولائی ۱۸۳۶ء سورج کے مرکز کا ظاہری صعود مستقیم بمقام گرینوچ مرور کے وقت مشاہدہ کرنے سے ۶ گ ۵۴ م ۳۰.۲ ش معلوم ہوا۔

اسی طرح بتاریخ ۴۔ جولائی ۱۸۹۰ء سورج کے مرکز کا صعود مستقیم ۶ گ ۵۳ م ۶۱.۵۴ ش معلوم ہوا۔

ہمیں اول وہ کوکبی وقفہ معلوم کرنا ہے جو ۴۔ جولائی ۱۸۳۶ء کے کوکبی وقت ۶ گ ۵۴ م ۳۰.۲ ش اور ۴۔ جولائی ۱۸۹۰ء کے کوکبی وقت ۶ گ ۵۳ م ۶۱.۵۴ ش کے درمیان ہے۔

یہ وقفہ ۵۴ سال کا ہے اور اس لیے راس الحمل کے مروروں کی تعداد سورج کے مروروں کی تعداد سے ۵۴ زیادہ ہوگی (دفعہ ۶۲ مثال ۱)۔ سورج کے مروروں کی تعداد ۱۹۷۲۳ ہے اور ♈ کے مروروں کی تعداد ۱۹۷۷۷ ہے، اور اس لیے پورا وقفہ کوکبی وقت میں

$$19777^{دن}\ 6^{گ}\ 53^{م}\ 61.54^{ش} - (6^{گ}\ 54^{م}\ 3.02^{ش})$$

اس کو ۱۹۷۲۳ سے تقسیم کرنے سے اوسط شمسی یوم کی کوکبی قیمت ۲۴ گ ۳ م ۵۶.۵۵۵ ش معلوم ہوتی ہے۔

مثال ۲ ۔ اوسط شمسی یوم کا طول کوکبی وقت میں حسب مثال ما سبق

دو لمحوں پر سورج کے صعود مستقیموں کا مقابلہ کرنے سے معلوم کیا گیا ہے، اِن لمحوں کا فرق ۱۰۰ سال ہے۔ ثابت کرو کہ دونوں صعود مستقیموں میں ۵ ثانیہ تک بڑی خطائیں اُس قیمت کو ثانیہ کے ہزارویں حصہ سے زیادہ متاثر نہیں کر سکتیں جو اوسط شمسی یوم کے لیے معلوم کی گئی ہو۔

مثال ۳ — اوسط شمسی وقت کو کوکبی وقت میں بدلنے کا ایک تقریبی قاعدہ اِس طرح بیان کیا جا سکتا ہے :- ہر ۱ گ ۱ م کے لیے ۱۰ ش جمع کرو، باقی ہر ۱ م ۱ ش کے لیے ۱/۶ ش جمع کرو باقی ہر ۴ ش کے لیے ۰۱. ش جمع کرو۔ اِس قاعدہ سے اوسط شمسی یوم کا طول معلوم کرنے میں کیا خطا ہوگی۔

مثال ۴ — اگر شمسی سال کی مدت کے اُس جملہ میں جو اوسط شمسی وقت کے دنوں، گھنٹوں، منٹوں، اور ثانیوں کی رقوم میں ہے دنوں کی تعداد میں ایک کا اضافہ کیا جائے لیکن گھنٹے، منٹ اور ثانئے نہ بدلے جائیں تو نتیجہ شمسی سال کی مدت کو کوکبی وقت کے دنوں، گھنٹوں، منٹوں اور ثانیوں میں بیان کرے گا۔

۶۹ — اوسط ظہر پر کوکبی وقت۔

(۲۱۰)

ایک دئے ہوئے لمحہ پر اوسط سورج کا صعود مستقیم یا زیادہ صحیح طور پر ۲ اور اوسط سورج کا درمیانی فاصلہ حسب شرح دفعہ ۶۸ سورج کا اوسط طول بلد ہوتا ہے اور اس کے لیے جملہ ہے (مثال ۴ دفعہ ۶۷)

$$۲۸۰، ۴۹۹۴۲^\circ + ۳۶۰^\circ \times ت \backslash ت_۱$$

جہاں ت۱، شمسی سال کا طول ہے اور ت\ت۱ شمسی سال کا وہ کسری حصہ ہے جو یکم جنوری سنہ ۱۹۰۹ء کی ظہر سے گذر چکا ہے۔

اِس جملہ کو ۱۵° فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تحویل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یکم جنوری گرینوچ اوسط ظہر کے بعد ت اوسط شمسی ایام پر اوسط سورج کا صعود مستقیم ہے

$$۱۸^گ\ ۴۱^م\ ۵۸،۸۴^ش + ۲۳۶،۵۵۵۴^ش\ ت$$

ان مشاہدات کی نوعیت جن سے اس جملہ کی پہلی رقم ا کی قیمت حاصل کی گئی ہے حسب ذیل طریقہ پر واضح کی جاسکتی ہے۔ سال ت کو مساوی حصوں کی ایک کافی تعداد میں تقسیم کرو۔ تقسیم کے ہر نقطہ پر فرض کرو کہ سورج کا صعود مستقیم مشاہدہ کیا گیا ہے اور یہ صعود مستقیم علی الترتیب عہ$_{1}$، عہ$_{2}$ ... ہیں۔ ہم مان لیں گے کہ ان صعود مستقیموں کا اوسط انہی لمحوں پر اوسط سورج کے صعود مستقیموں کے اوسط کے مساوی ہے۔ یہ مفروضہ جائز ہے کیونکہ خاص دوری رقموں میں سے ہر رقم ایک وقفہ میں جس میں سال کے مساوی حصوں کی ٹھیک تعداد شامل ہو تبدیلیوں کے ایک پورے دور میں سے گذرتی ہے۔ اس لیے اگر ہم لمحوں کی ایک ایسی تعداد لیں جو سال کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ان میں سے ہر رقم کی اوسط قیمت ان لمحوں پر صفر ہوگی (بشرطیکہ لمحوں کی تعداد کافی بڑی لی گئی ہو، دفعہ ۶۷) پس اصلی اور اوسط سورج کے اوسط صعود مستقیم ان لمحوں پر مساوی ہوں گے۔ ہم اس عمل کو ایسے چھ لمحات لیکر واضح کریں گے۔ فرض کرو کہ ان لمحات پر سورج کے اوسط طول بلد علی الترتیب

ا، (ا + ۴$^{\text{گ}}$)، (ا + ۸$^{\text{گ}}$)، ......

ہیں جہاں ا نامعلوم مقدار ہے جسے معلوم کرنا ہے۔ اگر ہم اصلی سورج کے صعود مستقیم (عہ$_{1}$، عہ$_{2}$ ....) ان لمحوں پر معلوم کریں تو حاصل ہوتا ہے

ا + (ا + ۴$^{\text{گ}}$) + (ا + ۸$^{\text{گ}}$) + (ا + ۱۲$^{\text{گ}}$) + (ا + ۱۶$^{\text{گ}}$) + (ا + ۲۰$^{\text{گ}}$)

= عہ$_{1}$ + عہ$_{2}$ + عہ$_{3}$ + عہ$_{4}$ + عہ$_{5}$ + عہ$_{6}$

ا حاصل کرنے کے لیے ہم ایک مخصوص صورت کے طور پر عہ$_{1}$، عہ$_{2}$، ... عہ$_{6}$ کی قیمتیں حسب ذیل جدول سے لیتے ہیں۔ (۲۱۹)

مساوی الفصل تاریخیں

گرینوچ اوسط وقت (گ۔ا۔و)	سورج کا صعود مستقیم
۱۹۰۹ء جنوری ۱ دن گ	۱۸گ ۴۵م ۳۳ث

	دن	گ	گ	م	ث
مارچ	۲	۲۱	۲۲	۵۴	۱۲
مئی	۲	۱۸	۲	۳۸	۴۱ + ۲۴ گ
جولائی	۲	۱۵	۶	۴۵	۴۷ + ۲۴ گ
ستمبر	۱	۱۲	۱۰	۴۱	۵۴ + ۲۴ گ
نومبر	۱	۹	۱۴	۲۵	۴۰ + ۲۴ گ

ضابطہ میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے

$$\alpha = 18^{g}\ 41^{m}\ 58^{s}$$

α میں ایک ثانیہ سے کم کا خفیف تغیر کرنے سے (جو ضروری ہے جبکہ بہت سی چھوٹی تفصیلات ملحوظ رکھی جائیں جنکا یہاں غور کرنا ممکن نہیں تھا) α کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے

$$18^{g}\ 41^{m}\ 58{,}84^{s}$$

جب اوسط سورج نصف النہار پر آتا ہے تو اس کا صعود مستقیم بلاشبہ اس لمحہ پر کوکبی وقت ہوتا ہے۔ اس سے ہمیں عملی علم ہیئت کا وہ اہم عنصر ملتا ہے جو اوسط ظہر کے کوکبی وقت کے طور پر مشہور ہے۔ یہ مقدار کوکبی وقت کو اوسط وقت میں اور اوسط وقت کو کوکبی وقت میں تحویل کرنے میں ناگزیر ہے۔ ایفیمرس میں ہر دن کے لیے اوسط ظہر پر کوکبی وقت دیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ بمقام گرینوچ بوقت اوسط ظہر بتاریخ ۲۷ مارچ ۱۹۰۹ء کوکبی وقت گ ۱۷ م ۶ ث ہے۔

بتاریخ ۲۷ مارچ اوسط ظہر پر یکم جنوری سے وقفہ ۸۵ دن ہے۔ ت کی بجائے یہ قیمت جملہ

$$18^{g}\ 41^{m}\ 58{,}84^{s} + 236{,}5554^{s}\ \text{ت}$$

میں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲ ــ معلوم کرو کہ ۱۹۰۹ء کی کس تاریخ پر اوسط سورج راس الحمل میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۳ ــ اگر یہ دیا جائے کہ بمقام گرینوچ بتاریخ ۲۱ مارچ ۱۸۹۶ء راس الحمل کے مرور کے اوسط اوقات ۰ گ ۱ م ۵۹٫۷۰ ش اور ۲۳ گ ۵۸ م ۳٫۷۹ ش ہیں تو وہ لمحہ معلوم کرو جس پر گرینوچ اوسط وقت اور کوکبی وقت مساوی ہوتے ہیں

مثال ۴ ــ ثابت کرو کہ یکم جنوری ۱۹۰۰ء کی اوسط ظہر کے بعد ت اوسط شمسی ایام پر اوسط سورج کا صعود مستقیم ۱۸ گ ۴۲ م ۴۳٫۵۱ ش + ۲۳۶٫۵۵۴ ش ت ہے اور سورج کا اوسط طول بلد ۲۸۰٫۶۸۱° + ۰٫۹۸۵۶۵ ت ہے۔

۷۰ ــ کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا۔ (۲۲۰)

کسی مقام پر اوسط شمسی وقت کی تعیّن فی الحقیقت بالواسطہ یا بلاواسطہ سورج کے مُشاہدات پر منحصر ہوتی ہے۔ ملاح عموماً اپنے آلہ سدس سے صبح یا شام کے وقت سورج کا مشاہدہ کرکے وقت معلوم کرتا ہے۔ یہ راست طریقہ کی مثال ہے۔ لیکن ہیئت داں جس کے پاس آلہ سُدس کی بہ نسبت زیادہ بڑی طاقت اور صحت کے ثابت آلات ہوتے ہیں بالعموم اوسط وقت کو کوکبی وقت سے محسوب کرکے اخذ کرتا ہے، کوکبی وقت کو جیسا کہ قبل ازیں دفعہ ۶۳ میں سمجھایا جاچکا ہے وہ بعض "گھڑی تاروں" (clock stars) کے مُشاہدے سے حاصل کرتا ہے۔ اِن گھڑی تاروں کے مقامات ایفیمرس سے معلوم ہوتے ہیں۔ یہ مقامات ♈ کے محل پر منحصر ہوتے ہیں جسے شمسی مُشاہدات سے متعین کیا جاتا ہے پس اوسط وقت کو گھڑی تارے کے ذریعہ معلوم کرنے کا یہ طریقہ ایسا ہے کہ اس میں سورج کے مُشاہدات صرف بالواسطہ شامل ہیں۔

ایفیمرس سے وہ اصلی کوکبی وقت معلوم ہوتا ہے جس پر گھڑی تارہ نصف النہار کو عبور کرتا ہے اور مُشاہدہ وہ وقت نوٹ کر لیتا ہے جو اِسکی

کوکبی گھڑی بتاتی ہے۔ اِن دو وقتوں کا فرق اس کی گھڑی کی تصحیح ہے اور اس لیے کوکبی وقت معلوم ہو جاتا ہے۔ ایفیمرس سے گرینوچ اوسط ظہر کا کوکبی وقت بھی معلوم ہوتا ہے، اس لیے اگر بوقت ظہر اوسط وقت کی گھڑی کا مقابلہ کوکبی گھڑی کے ساتھ کیا جائے تو اس سے اوسط وقت کی گھڑی کی خطا معلوم ہو جائے گی۔ لیکن بالعموم بوقت ظہر اوسط وقت کی گھڑی اور کوکبی گھڑی کا مقابلہ نہیں کیا جا سکتا اور نہ بالعموم مشاہد کا طول بلد صفر ہوگا۔ اسلیے ہم حسب ذیل عمل کرتے ہیں:۔

فرض کرو کہ ک مقامی کوکبی وقت ہے،

" ت اُسی آن مقامی اوسط وقت ہے،

" ل مشاہد کا طول بلد ہے گرینوچ کے مغرب میں،

" ن اوسط شمسی ایام کی تعداد ایک شمسی سال میں،

= ۳۶۵٫۲۴۲۲

" م وہ کوکبی وقت ہے جو بمقام گرینوچ ایک یوم قبل اوسط ظہر پر تھا۔

ن اوسط شمسی ایام میں ن + ۱ کوکبی ایام ہوتے ہیں، اس لیے شمسی وقت کا کوئی وقفہ مماثل کوکبی وقت میں جزو ضربی (ن + ۱) \ ن کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے اور کوکبی وقت کا کوئی وقفہ مماثل شمسی وقت میں جزو ضربی ن \ (ن + ۱) کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے۔ مجوزہ صورت میں طول بلد ل ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے حسب ذیل دو نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) راس الحمل کوکبی وقت کے ل گھنٹوں میں گرینوچ کے نصف النہار سے مُشاہد کے نصف النہار تک حرکت کرے گا۔

(۲) اوسط وقت کے ل گھنٹوں میں اوسط سورج گرینوچ کے نصف النہار سے مُشاہد کے نصف النہار تک حرکت کرے گا۔

چونکہ زیر بحث لمحہ پر کوکبی اور اوسط مقامی اوقات ک اور ت ہیں

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ک + ل اور ت + ل گرینوچ پر متناظر کوکبی اور اوسط اوقات ہیں۔

اوسط وقت کا وقفہ ت + لَ کوکبی وقت میں جزو ضربی (ن + ۱)\ن کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے۔ اسے ک + ل میں سے تفریق کیا جائے تو اسی دن گرینوچ کی اوسط ظہر پر کوکبی وقت ملنا چاہیے، اس لیے

م = ک + ل – (ن + ۱)(ت + ل)\ن

اس مساوات کو حسب ذیل مماثل اشکال میں لکھا جا سکتا ہے جو ایفیمرس کی جدولوں کے ساتھ استعمال کرنے میں اکثر سہولت بخش ثابت ہوئی ہیں:۔

ت + ل = (ک + ل – م) ن\(ن + ۱)،

ک + ل = م + (ت + ل)(ن + ۱)\ن

کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنے کا سب سے زیادہ عملی طریقہ غالباً حسب ذیل ہے:۔

اگر ہم مندرجۂ بالا تین مماثل مساواتوں میں سے کسی ایک میں ت = ۰ رکھیں اور اگر مقامی اوسط ظہر کے مقامی کوکبی وقت کو مَ بنائیں تو

م = مَ + ل – ل (ن + ۱)\ن

یا مَ = م + ل\ن

مقدار ل\ن اس مخصوص نصف النہار کے لیے ایک مستقل مقدار ہے۔ اس کو اگر گرینوچ کی اوسط ظہر پر کے کوکبی وقت میں جمع کیا جائے تو مقامی کوکبی وقت مقامی اوسط ظہر پر حاصل ہو جاتا ہے۔ پس یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

ت = (ک – مَ) ن\(ن + ۱)

جو ان جدولوں سے بہت ہی آسانی کے ساتھ محسوب کیا جا سکتا ہے جو کوکبی وقت کے وقفوں کو اوسط وقت کے متناظر وقفوں میں بدلنے کے لیے تیار کی جاتی ہیں۔

مثال ۱ — اگر بمقام گرینوچ بوقت اوسط ظہر کوکبی وقت م ہو تو ثابت کرو کہ ایک مقام پر جس کا طول بلد (گرینوچ کے مغرب میں) ل ہے اُسی دن اوسط ظہر پر کوکبی وقت م' مساوات

$$م' = م + ۹٫۸۵۶۵^{ش} \times ل$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲ — ثابت کرو کہ اگر وقت کا ایک وقفہ ت سے تعبیر ہو جبکہ اُسے اوسط وقت میں شمار کیا جائے اور ت' سے تعبیر ہو جبکہ اُسے کوکبی وقت میں شمار کیا جائے تو

$$ت' = ت + ۹٫۸۵۶۵^{ش}\, ت$$

$$ت = ت' - ۹٫۸۲۹۶^{ش}\, ت'$$

جہاں پر جملہ کی آخری رقم میں ت اور ت' گھنٹوں اور ایک گھنٹے کے کسری حصوں میں بیان کئے گئے ہیں۔ (۲۲۲)

مثال ۳ — بتاریخ ۱۸ فروری ۱۹۰۹ء بمقام گرینوچ اوسط ظہر پر کوکبی وقت $۲۱^{گ}\ ۵۱^{م}\ ۱۳٫۵۵^{ش}$ ہے۔ ثابت کرو کہ راس الحمل کا مرور $۲^{گ}\ ۸^{م}\ ۲۵٫۳۵^{ش}$ اوسط وقت پر واقع ہوتا ہے۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ بمقام گرینوچ کوکبی ظہر کا گرینوچ اوسط وقت یہ ہے

$$(۲۴^{گ} - م)\ ن \backslash (ن + ۱)$$

جہاں م' اوسط ظہر پر کوکبی وقت ہے اور ن، شمسی سال میں اوسط شمسی ایام کی تعداد ہے۔

نیز ثابت کرو کہ مغربی طول بلد ل پر کوکبی ظہر کا مقامی اوسط وقت، گرینوچ پر کوکبی ظہر کے گرینوچ اوسط وقت میں سے ن\(ن + ۱) تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نوٹ:- کوکبی ظہر سے ♈ کے بالائی تکبُّد کا لمحہ مُراد ہے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ بتاریخ یکم نومبر ۱۹۰۸ء ۱ ب۔ ظ گرینوچ اوسط وقت پر بمقام مدراس کوکبی وقت ۲۱ گ ۲ م ۳۹ ش ہے اگر مدراس کا طول بلد ۵ گ، ۲۱ م ۸ ش م ہو اور گرینوچ پر بوقت اوسط ظہر کوکبی وقت ۱۴ گ ۴۱ م ۲۹ ش ہو۔

مثال ۶ — کولمبیا کالج نیو یارک طول بلد ۴ گ ۵۵ م ۵۴ ش مغرب میں ہے بتاریخ ۱۲ دسمبر ۱۹۰۸ء گرینوچ پر بوقت اوسط ظہر کوکبی وقت ۱۷ گ ۲۳ م ۸ ش ہے۔ ثابت کرو کہ اسی دن جبکہ کولمبیا کالج پر کوکبی وقت ۲۰ گ ۸ م ۴ ش ہو تو مقامی اوسط وقت ۲ گ ۴۳ م ۴۱ ش ہوگا۔

مثال ۷ — وہ کوکبی وقت جس پر سورج کا نیم قطر بتاریخ یکم جولائی ۱۹۰۸ء نصف النہار کو عبور کرتا ہے ۱ م ۸٫۷۳ ش ہے۔ ثابت کرو کہ متناظر اوسط وقت کوکبی وقت سے ۰٫۱۹ ش تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۷۱ — ارضی تاریخ خط۔

ذیل کی ایک مخصوص مثال کے ذریعہ ارضی تاریخ خط کا مطلب ذہن نشین کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ بمقام گرینوچ بروز چہار شنبہ بتاریخ ۱۴ جون ۱۹۰۵ء وقت ۱۰ ب۔ ظ[1] ہے ہمیں یہ غور کرنا ہے کہ اسی آن ہر دیگر نصف النہار (مشرق یا مغرب) پر کیا وقت ہے اور خاص کر کونسا دن ہے۔

نصف النہار ۹ گ ۵۹ م (گرینوچ کے مغرب) پر معینہ آن پر وقت عین نیم شب کے بعد ہے یعنی چہار شنبہ کا آغاز ہوچکا ہے۔ لیکن نصف النہار ۱۰ گ ۱ م مغرب پر وقت ۱۱ گ ۵۹ م ب۔ ظ ہے اور اس لیے اس نصف النہار کا

[1] A. M. ق ظ P. M. ب ظ

ابھی سہ شنبہ ہے اور تاریخ ۱۳ ر جون ہے۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ سطح ارض کے ہر نصف النہار پر ایک چٹ لگی ہوئی ہے جس پر گرینوچ کے ۱۴ ر جون ۱۹۰۵ء کے وقت ۱۰ ب۔ ن کے جواب میں ہفتہ (یا مہینہ) کا دن لکھا ہوا ہے تو ان چٹوں پر کے ناموں میں اچانک تبدیلی ہوگی جب ہم اُس نصف النہار پر پہنچیں گے جو گرینوچ سے ۱۰ گ غ پر ہے۔

لیکن یہ بآسانی معلوم ہوتا ہے کہ تسلسل کی ایک اور شکست کسی دوسرے نصف النہار پر واقع ہونی چاہیئے۔ کیونکہ یہ تصور کرو کہ ہم خیال کی سرعت کے ساتھ پوری زمین کے گرد نصف النہار ۱۰ گ سے مغرب کی جانب حرکت کر سکتے ہیں تو ہم اُن نصف النہاروں کو عبور کرتے ہوئے چلیں گے جن پر سہ شنبہ کی چٹ لگی ہے لیکن جب سفر قریب الختم ہو اور ہم مشرق سے نصف النہار ۱۰ گ کی طرف آرہے ہوں تو ہم دیکھیں گے کہ نصف النہاروں پر چہار شنبہ کی چٹ لگی ہے۔ اس لیے ایک نصف النہار سے جس پر ایک دن کی چٹ لگی ہے اُس نصف النہار تک جس پر دوسرے دن کی چٹ لگی ہے کوئی اور تاریخ کی تبدیلی عمل میں آچکی ہے۔ (۲۲۳)

نصف النہاروں پر کی چٹوں میں تسلسل کی یہ دوسری شکست اس طرح پیدا نہیں ہو سکتی جس طرح کہ نیم شب کے وقوع سے ہوئی تھی۔ نیم شب کے نقطے پر تبدیلی غلط سمت میں ہوگی اور بلا شبہ ۱۰ گ غ ہی پوری سطح زمین پر وہ نصف النہار ہے جہاں اُس وقت آدھی رات ہوگی۔ اس لیے عرض بلد کے ہر توازی میں ایک دوسرا نقطہ ہونا چاہیئے جس پر تاریخوں کے تسلسل میں جو اس توازی پر کے مختلف مقامات سے متعلق ہیں ایک شکست ہو۔ اس مقصد کے لیے توازی پر کا کوئی نقطہ مقرر کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے ہم عام سہولت کا لحاظ کرتے اسے اختیاری طور پر منتخب کرتے ہیں چنانچہ اس قرارداد کی پیروی کی جاتی ہے کہ یہ نقطہ گرینوچ سے نصف النہار ۱۲ گ سے حتی الامکان قریب واقع ہو اگر وہ اس نصف النہار پر فی الواقعی نہ لیا جا سکے۔ حقیقی تاریخ خط جیسا کہ وہ موسوم ہے قطب سے قطب تک

کھنچا جاتا ہے — جہاں تک کہ ۱۲گ کا نصف النہار کھلے سمندر میں سے گذرتا ہے یہ تاریخ خط اِس نصف النہار پر منطبق ہوتا ہے اور صریحًا اِس کے راستہ کا زیادہ حصہ سمندر میں سے گذرتا ہے۔ دوسرے مقامات پر یہ تاریخ خط ۱۲گ کے نصف النہار کی ایک یا دوسری جانب قدرے جھولتا ہے تاکہ وہ مثلاً آباد علاقے الاسکا (Alaska) میں سے نہ گذرنے پائے یا جزائر الیشین[1] کی ایسی تقسیم نہ کردے کہ اُس سے وہاں کے باشندوں کو تکلیف ہو۔

مجوزہ صورت میں ۱۰گ غ تک تمام مغربی طول بلدوں پر دن چہارشنبہ اور تاریخ ۱۴؍جون ہے۔ مغربی طول بلدوں کے دو اور گھنٹوں کے لیے یعنے ۱۰گ غ سے ۱۲گ غ تک یا زیادہ صحیح طور پر ۱۰گ غ سے اُس نقطے تک جہاں تاریخ خط عبور کرتا ہے دن سہ شنبہ ہے اور تاریخ ۱۳؍جون لیکن چونکہ یہ توازی تاریخ خط کو عبور کرتا ہے اس لیے تاریخ دفعتًا بدلتی ہے چنانچہ اِس خط کے عین قریب ایک جانب وقت ۱۰ ب۔ ظ۔ دن سہ شنبہ تاریخ ۱۳؍جون ہوتی ہے تو دوسری جانب وقت ۱۰ ب۔ ظ۔ دن چہارشنبہ تاریخ ۱۴؍جون ہوتی ہے۔ اس طرح ۰گ سے تقریبًا ۱۲گ تک تمام مشرقی طول بلدوں پر دن چہارشنبہ اور تاریخ ۱۴؍جون ہے۔ پس یہ معلوم ہوا کہ زیر بحث لمحہ پر طول بلد کے تقریبًا ۲۲ گھنٹے چہارشنبہ کا دن ۱۴؍جون کی تاریخ رکھتے ہیں اور دو گھنٹے سہ شنبہ کا دن ۱۳؍جون کی تاریخ رکھتے ہیں۔

دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ یکشنبہ کے دن گرینوچ پر وقت ۶ ب۔ ظ ہے۔ اِس لیے طول بلد ۵گ ۵۹م پر وقت ۱۱گ ۵۹م ب۔ ظ اور دن یکشنبہ ہے لیکن طول بلد ۶گ ۱م پر وقت ۰گ ۱م ب۔ ن اور دن دوشنبہ ہے۔ اِس لیے جیسے ہم طول بلد ۶گ م سے مشرقًا طول بلد ۱۲گ م تک یا زیادہ صحیح طور پر اِس توازی پر کے تاریخ خط تک حرکت کرتے ہیں دن دوشنبہ ہے (۲۲۴)

[1] Aleutian

لیکن تاریخ خط پر (جہاں حقیقی وقت تقریباً ۶ ب ـ ن ہے) دن دفعتاً اِسی ساعت پر یکشنبہ میں بدل جاتا ہے اور تاریخ خط سے گرینوچ تک تمام مغربی طول بلدوں پر یکشنبہ رہتا ہے۔

نویں باب پر مثالیں

مثال ۱ — اگر سورج کا طول بلد لہ ہو، اِس کا صعود مستقیم عہ اور طریق الشمس کا میلان سہ تو ثابت کرو کہ لہ ـ عہ کی بڑی سے بڑی قیمت اُس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ مس لہ = √قط سہ اور مس عہ = √جم سہ ـ

مثال ۲ — بتاریخ ۲۲ ستمبر سورج کا میل مرور پر ۱۷َ ۸۰،۲ ش مشاہدہ کیا گیا اور بتاریخ ۲۳ ستمبر اِس کا میل ۶َ ۵۶،۲۱ ج مشاہدہ کیا گیا۔ نیز اِن دو مروروں کا کوکبی وقفہ ۲۴ گ ۳ م ۳۵،۵۰ ش تھا۔ دوسرے مشاہدہ پر سورج کا صعود مستقیم کیا تھا؟
[Coll Exam.]

اِس مثال کے طریقہ سے راس الحمل معلوم کرنے میں خاص خطاؤں کے واقع ہونے کا کہاں امکان ہے۔

مثال ۳ — قطب تارہ کا صعود مستقیم ۱ گ ۲۱ م ۱۸ ث ہے۔ گرینوچ پر اوسط ظہر کے کوکبی اوقات بتواریخ ۱۱ اور ۱۲ اپریل علی الترتیب ۱ گ ۱۹ م ۵۰،۶۰ ث اور ۱ گ ۲۳ م ۱۵،۷۴ ث ہیں۔ گرینوچ پر بتاریخ ۱۱ اپریل قطب تارے کے تین مروروں کے اوسط اوقات معلوم کرو۔
[Coll. Exam.]

مثال ۴ — بحری جنتری سے حسب ذیل چیزیں دی گئی ہیں:-

اوسط ظہر کا کوکبی وقت بتاریخ ۲۱ مارچ ۱۸۹۸ء　۲۳ گ　۵۶ م　۵،۸۷ ث

بتاریخ ۲۲ مارچ ۱۸۹۸ء　″　″　۲،۴۲

تقریبی طور پر وہ اوسط وقت معلوم کرو جس پر اوسط سورج اعتدال ربیع سے گذرا تھا۔

[Coll. Exam.]

مثال ۵ — ایک ستارہ جس کا صعود مستقیم ۵گ ۹م ۹ء۴۳ش ہے بتاریخ ۷ر فروری بمقام سیڈنی (طول بلد ۱۵۱° ۱۲' ۲۳" م) مرور میں ہے جبکہ مشاہد کی گھڑی میں مقامی وقت ۸گ ۲م ۳ش ہے۔ اگر گرینوچ پر بتاریخ ۷ر فروری اوسط ظہر اوسط سورج کا صعود مستقیم ۲۱گ ۸م ۱ء۳۶ش ہو اور اگر کوکبی وقت کا ایک گھنٹہ اوسط وقت کے ۵۹م ۱۲ء۰۵ش کے معادل ہو تو قریب ترین ثانیہ تک معلوم کرو کہ گھڑی کسقدر سست یا تیز ہے۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ ایک معلومہ ستارہ کا ایک واحد ارتفاع عرض بلد معلوم کرنے کے لیے کافی ہے اگر مقامی کوکبی وقت معلوم ہو، اور مقامی کوکبی وقت معلوم کرنے کے لیے کافی ہے اگر عرض بلد معلوم ہو۔

اگر مشاہدہ کردہ ارتفاع میں قوس کے لا منٹوں کی خطا ہو تو ماخوذ کوکبی وقت میں وقت کے $\frac{۱}{۱۵}$ لاقط لہ قم ا منٹوں کی خطا ہو گی جہاں لہ، مقام کا عرض بلد ہے اور ا، مشاہدہ کی آن پر ستارہ کا السمت ہے۔ (۲۲۵)

مثال ۷ — میل ضہ کے ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی ہے جبکہ اسے نصف النہار کے قریب ساعتی زاویے ت پر مشاہد کیا گیا۔ اگر فہ - ضہ بہت چھوٹا نہیں ہے تو ثابت کرو کہ عرض بلد مساوات

$$\text{فہ} = \text{ی} - \text{ضہ} \quad \frac{\text{۲ جم ضہ جم فہ}}{\text{جب (فہ - ضہ)}} \text{ جب}^{۲} \frac{۱}{۲} \text{ ت}$$

سے صحیح طور پر معلوم کیا جا سکتا ہے جس کی آخری رقم میں فہ کی ایک تقریبی قیمت استعمال کی جا سکتی ہے۔

مثال ۸ — اگر وہ کوکبی اوقات جبکہ سورج نصف النہار کی ہر جانب مساوی ارتفاعوں پر پہنچتا ہے عَ اور ع ہوں اور اگر اس وقفہ میں سورج کے میل ضہ کی تبدیلی فرضہ ہو اور اگر سورج کا صعود مستقیم بوقت مرور عہ ہو تو ثابت کرو کہ اصلی کوکبی وقت حاصل کرنے کے لیے گھڑی کے وقت میں جو تصحیح کرنی ہو گی وہ

$$\text{عہ} - \frac{۱}{۲}(\text{ع} + \text{عَ}) - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{مس ضہ}}{\text{مس } \frac{۱}{۲}(\text{عَ} - \text{ع})} - \frac{\text{مس فہ}}{\text{جب } \frac{۱}{۲}(\text{عَ} - \text{ع})}\right) \text{فرضہ}$$

ہے ۔ نیز یہ سمجھاؤ کہ ان دو مشاہدات کے درمیان صعود مستقیم میں سورج کی جو حرکت ہے اُس کو محسوب کرنے کی ضرورت کیوں نہیں ہے ۔

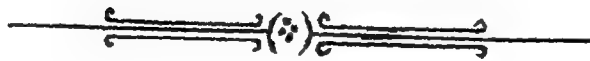
مثال ۹ ۔ اگر سورج کا راسی فاصلہ نصف النہار سے قریب ل ۔ ضہ مشاہدہ کیا جائے جبکہ اس کا میل ضہ ہے اور اگر وقت کے ثانیوں میں اسکا ساعتی زاویہ س ہو تو ثابت کرو کہ مقام کا عرض بلد تقریباً

$$\text{ل} - \frac{\text{جم ل جم ضہ جب ١''}}{\text{٢ جب (ل} - \text{ضہ)}}\,(\text{١٥ س})^{2}$$

ہے ۔

نیز ثابت کرو کہ اگر یہ مشاہدہ ایک جہاز سے کیا جائے جو نصف النہار کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں حرکت کر رہا ہے تو بڑے سے بڑا ارتفاع اس وقت واقع ہوتا ہے جبکہ سورج فوری نصف النہار سے وقت کے تقریباً ھ ثانیوں پر ہو جہاں

$$\text{ھ} = \frac{\text{جب (ضہ} - \text{فہ)}}{\text{جم فہ جم ضہ}}\left(\frac{\text{و جم طہ}}{\text{ر جب ١''}} - \text{م}\right)\frac{1}{15^{2} \times 60^{2} \times \text{جب ١''}}$$

جس میں و وہ طول ہے جو جہاز فی گھنٹہ طے کرتا ہے، زمین کا نصف قطر ر ہے، مقام کا عرض بلد فہ، سورج کا میل ضہ، اور میل کی تبدیلی فی گھنٹہ قوس کے ثانیوں میں م ہے ۔

(۲۲۶)

دسواں باب

سورج کی ظاہری سالانہ حرکت

۷۲ — جب سورج طریق الشمس پر اپنا سالانہ دور شروع کرتا ہے تو اس کا اصلی طول بلد ہ جو ۷ سے اس سمت میں ناپا جاتا ہے جس میں وہ حرکت کرتا ہے اگرچہ یکساں طور پر نہیں مگر مسلسل بڑھتا ہے۔ اسی طرح سورج کا صعود مستقیم عہ اگرچہ یکساں طور پر نہیں مگر مسلسل بڑھتا ہے۔ سورج کے صعود مستقیم اور طول بلد کے درمیان فرق یعنے مقدار (عہ - ہ) کو جو سورج کے طول بلد میں جمع کرنی ہوگی تاکہ اس کا صعود مستقیم حاصل ہو استوار کی تحویل کہتے ہیں۔ اب ہم یہ غور کریں گے کہ دوران سال میں استوار کی تحویل میں کیا تغیرات ہوتے ہیں۔ یہ مان لیا جاتا ہے کہ سورج کا

مرکز طریق الشمس میں رہتا ہے کیونکہ یہاں اِس کے چھوٹے عرض بلد کو جو اُسے کم ہے حساب میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

فرض کرو کہ طریق الشمس پر کے ایک نقطہ کا صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہے۔ اس نقطہ کا طول بلد ⊙ ہے اور اگر طریق الشمس کا میلان سہ ہو تو

مس عہ = جم سہ مس ⊙ ۔۔۔۔۔۔۔۔۔ (١)

اور ہم اس مساوات کو

جب (عہ − ⊙) = − مس² $\frac{1}{2}$ سہ جب (عہ + ⊙)' ۔۔۔۔۔ (٢)

میں تحویل کر سکتے ہیں۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ عہ − ⊙ کو حدود − جب⁻¹ مس² $\frac{1}{2}$ سہ اور + جب⁻¹ مس² $\frac{1}{2}$ سہ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ یعنی اگر سہ کی بجائے اِس کی اوسط قیمت بابتہ سنہ ١٩١٠ع ٢٣° ٢٧' ٤" لی جائے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ استواء کی تحویل − طہ اور + طہ کے درمیان متغیر ہوتی ہے جہاں طہ = ٢° ٢٨' ٨" − ⊙ کے صفر سے ٣٦٠° تک بڑھنے میں اِس تحویل کے جو تغیرات واقع ہوتے ہیں ذیل کے طریقہ پر واضح کئے جا سکتے ہیں۔ (٢٢٧)

جس وقت عہ اور ⊙ ایک ساتھ ♈ سے چلتے ہیں جہاں وہ دونوں صفر ہیں تو ⊙ اولاً بڑا ہوتا ہے اور اس لیے تحویل اولاً منفی ہوتی ہے اور اقل قیمت − طہ پر اسوقت پہنچتی ہے جبکہ ⊙ ٤٥° + $\frac{1}{2}$ طہ ہو۔ اِس کے بعد صعود مستقیم طول بلد سے ملنے کے لیے بڑھنے لگتا ہے چنانچہ ⊙ اور عہ ایک ساتھ ٩٠° پر پہنچتے ہیں اور تحویل یہاں صفر ہوتی ہے۔ دوسرے ربع میں صعود مستقیم عہ' ⊙ سے بتدریج آگے بڑھنے لگتا ہے اور جبکہ عہ' ١٣٥° + $\frac{1}{2}$ طہ ہو جاتا ہے تو ⊙' ١٣٥° − $\frac{1}{2}$ طہ پر ہوتا ہے اور تحویل اپنی اعظم قیمت + طہ تک پہنچتی ہے۔ تیسرے ربع میں تحویل دوسرے اقل − طہ تک جاتی ہے جبکہ ⊙ = ٢٢٥° + $\frac{1}{2}$ طہ اور چوتھے ربع میں تحویل دوسرے اعظم + طہ تک پہنچتی ہے جبکہ ⊙ = ٣١٥° − $\frac{1}{2}$ طہ۔ بالآخر ⊙ اور عہ کی قیمتیں ٣٦٠° پر منطبق ہو جاتی ہیں جبکہ دور پورا ہو چکتا ہے۔

استواء کی تحویل محسوب کرنے میں ہم ضابطہ (٣) کو استعمال کرتے ہیں جو

ضابطہ (۱) سے آسانی سے ماخوذ ہوتا ہے

مس (عہ - ٥) = - مس۲ ½ سہ جب ۲ ٥ \ (۱ + مس۲ ½ سہ جم ۲ ٥) ... (۳)

اس ضابطہ سے تحویل فوراً حاصل ہوتی ہے اگر کوئی طول بلد دیا گیا ہو۔ نیز اس میں سہولت ہے کہ (عہ - ٥) کے لیے ایک جملہ ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل کیا جائے جو چھوٹی مقدار مس۲ ½ سہ کی صعودی قوتوں میں ترتیب یافتہ ہو۔ یہ سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ مساوات (۱) سے ایک مشہور پھیلاؤ کے ذریعہ ماخوذ ہوتا ہے (دیکھو "ٹاڈ ہنٹر کا علم مثلث مستوی صفحہ ۲۳۸)۔

عہ - ٥ = - مس۲ ½ سہ جب ۲ ٥ + ½ مس۴ ½ سہ جب ۴ ٥ - ⅓ مس۶ ½ سہ جب ۶ ٥

+ .... (۴)

اس ضابطہ کی رقمیں نیم قطری زاویوں میں بیان ہوئی ہیں اس لیے اگر ہر نیم قطری زاویہ کی بجائے اس کا معادل ۸۶۴۰۰\۲ π = ۱۳۷۵۱ وقت کے ثانیئے رکھا جائے تو یہ ضابطہ زیادہ سہولت بخش شکل میں بیان ہو جاتا ہے۔ اگر ہم (۴) میں دئے ہوئے (عہ - ٥) کے جملہ کو ۱۳۷۵۱ سے ضرب دیں اور اگر سہ کی بجائے اس کی اوسط قیمت جو اوپر دی جا چکی ہے درج کر کے اسکی مزید تحویل کریں تو حاصل ہوتا ہے

عہ - ٥ = - ۵۹۲٫۳۸ ث جب ۲ ٥ + ۱۲٫۷۶ ث جب ۴ ٥ - ۰٫۱۳۶ ث جب ۶ ٥

(۵) ....

سلسلہ (۵) کی رقموں کے سر اس قدر سرعت سے گھٹتے ہیں کہ اس کی مندرجہ بالا تین رقموں سے زیادہ رقموں کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ بالعموم آخری رقم کو بھی نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہم یہ تسلیم کرلیں کہ (۴) کی دو رقموں سے زیادہ رقمیں مطلوب نہیں ہیں تو یہ رقمیں دوسری طرح سے ضابطہ (۳) سے حاصل ہو سکتی ہیں کیونکہ گرگوری کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

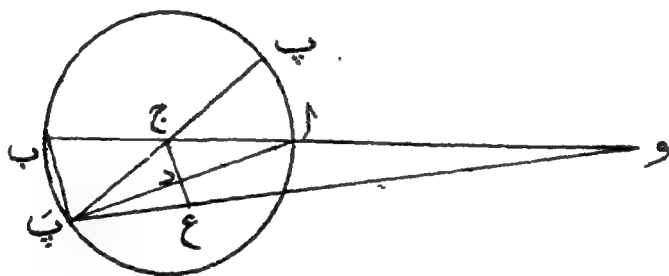
(۲۲۸)

ع - ہ = مس (ع - ہ) - ⅓ مس^۳ (ع - ہ) + ...

= - جب ۲ ہ مس^۲ ½ سہ - (۱ + جم ۲ ہ مس^۲ ½ سہ)^-۱ + ½ جب^۲ ۲ ہ مس^۴ ½ سہ

اِس سے مطلوبہ جملہ حاصل ہوتا ہے جبکہ مس^۶ ½ سہ سے چھوٹی مقداریں نظرانداز کی جائیں۔

مثال ۱ - کسی دیے ہوئے طول بلد کے لیے استواء کی تحویل حاصل کرنے کا حسب ذیل ترسیمی طریقہ ثابت کرو۔

ج کو مرکز اور ج ا = مس^۲ ½ سہ کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو (شکل ۶۴)۔ ایک ثابت نقطہ و ایسا لو کہ ج و = ۱۔ دائرہ پر نقطہ پ ایسا معلوم کرو کہ زاویہ و ج پ = ۲ ہ اور فرض کرو کہ دائرہ پر پَ وہ نقطہ ہے جو پ کے متقاطر ہے۔ تب زاویہ پَ و ج بہ تبدیل علامت استواء کی تحویل ہے۔ فرض کرو کہ ا اور ب وہ نقطے ہیں جن میں ج و دائرہ کو قطع کرتا ہے۔

شکل (۶۴)

ا پَ اور ب پَ کو ملاؤ۔ ج د، ا پَ پر عمود کھینچو اور اسے خارج کرو کہ وہ و پَ سے ع پر ملے۔ تب پنسل پَ (و ا ج ب) کی غیر موسیقی نسبت

و ا \ و ب = (۱ - مس^۲ ½ سہ) \ (۱ + مس^۲ ½ سہ) = جم سہ

ہے لیکن چونکہ ا پَ، ب پَ پر اور ج د پر عمود ہے اِس لیے وہی غیر موسیقی نسبت

ع د \ د ج = مس ع پَ د \ مس د پَ ج

کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے

مس ع پ د = جم سہ مس د پ ج = جم سہ مس ہ

اس لیے ع پ د = عہ، اور چونکہ ج ا پ = ج پ ا = ہ اس لیے

پ د ج = ہ - عہ۔

مثال ۲۔ حسب ذیل عمل ثابت کرو۔ کوئی خط ا ب لو اور اس کا حصہ ا ج ایسا قطع کرو کہ ا ج = ا ب جم سہ۔ خط ا ب کے نقطہ ا پر عمود ا ل کھڑا کرو۔ خط ج پ کھینچو کہ وہ ا ل سے پ پر ملے اور زاویہ ا ج پ = ہ۔ ب پ کو ملاؤ۔ تب زاویہ ا ب پ = عہ اور زاویہ ب پ ج استوا کی تحویل ہے۔

مثال ۳۔ مثال ا سے ثابت کرو کہ تحویل کی بڑی سے بڑی قیمت جب$^{-1}$(مس^2 $\frac{1}{2}$ سہ) ہے اور اس صورت میں ا پ (مثال ۲) اس دائرہ کا مماس ہے جو ج ب پ کا حائط ہے اور یہ کہ عہ اور ہ متمم ہیں۔ (۲۲۹)

مثال ۴۔ اگر یہ فرض کیا جائے کہ سورج طریق الشمس میں یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور دوسرا جرم خط استوا میں اسی یکساں شرح سے حرکت کرتا ہے تو ثابت کرو کہ ان کے صعود مستقیموں کا فرق سال میں چار دفعہ صرف اس صورت میں معدوم ہوگا کہ راس الحمل کے نقطہ میں سے ان کے عبوروں کے درمیان وقفہ سال کے جب$^{-1}$(مس^2 $\frac{1}{2}$ سہ)/۲ π حصہ سے کم ہو۔

[Coll. Exam.]

فرض کرو کہ سال کی وہ کسر ت ہے جو ♈ سے سورج کے عبور اور ♈ سے اس جرم کے عبور کے درمیان گذر چکی ہے جو خط استوا میں حرکت کر رہا ہے۔

اگر ان دونوں اجسام کے صعود مستقیم عہ ہوں تو

مس (۲ π ت + عہ) جم سہ = مس عہ

اس لیے عہ کے لیے مساوات ملتی ہے

مس^2 عہ مس ۲ π ت - (۱ - جم سہ) مس عہ + مس ۲ π ت جم سہ = ۰،

اِس مساوات کی اصلیں حقیقی ہوں گی اگر

$$\text{۲ ہ ت} < \text{جب}^{۱}\left(\text{مس}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{سہ}\right)$$

اس لیے مس عہ کی دو حقیقی قیمتیں ہوں گی اور عہ کی چار۔

مثال ۵ — یہ تسلیم کر کے کہ سورج کا ظاہری مدار دائری ہے ثابت کرو کہ ایک اعتدال پر اور ایک انقلاب پر نصف النہار کو عبور کرنے میں سورج کے قطر کو جو کوکبی وقت لگتے ہیں اِن میں نسبت تقریباً (جم سہ — ۰۰۲۷، جب^{۲} سہ) ہے جہاں طریق الشمس کا میلان سہ ہے۔

اگر سورج کا نصف قطر ر اور اس کا میل ضہ ہے تو اُس لمحہ پر جبکہ سورج کا اگلا کنارہ نصف النہار پر ہو اس کے مرکز کا ساعتی زاویہ — ر قط ضہ ہے اِس لمحہ پر کوکبی وقت ت$_{۱}$ اور سورج کا صعود مستقیم عہ$_{۱}$ ہو تو

$$\text{ت}_{۱} - \text{عہ}_{۱} = -\,\text{ر قط ضہ}$$

اسی طرح پچھلا کنارہ نصف النہار پر ہو تو

$$\text{ت}_{۲} - \text{عہ}_{۲} = +\,\text{ر قط ضہ}$$

اور اس لیے $\quad (\text{ت}_{۲} - \text{ت}_{۱}) - (\text{عہ}_{۲} - \text{عہ}_{۱}) = \text{۲ ر قط ضہ}$

مساوات مس عہ = جم سہ مس ٥ کو تفرق کرنے اور جم ٥ = جم عہ جم ضہ کا لحاظ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر عہ}}{\text{فر ت}} = \text{جم سہ قط}^{۲}\text{ضہ}\ \frac{\text{فر ٥}}{\text{فر ت}}$$

لیکن چونکہ ت ایک دن میں ۳۶۰° تک بڑھتا ہے اور ٥ تقریباً ۳۶۵ دنوں میں اسی قدر بڑھتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{فر ٥}}{\text{فر ت}} = \frac{۱}{۳۶۵} = \text{۰۰۲۷۰}$$

اس طرح $\quad \dfrac{\text{فر عہ}}{\text{فر ت}} = \text{۰۰۲۷۰ جم سہ قط}^{۲}\text{ضہ}$

اور $\quad \text{عہ}_{۲} - \text{عہ}_{۱} = (\text{ت}_{۲} - \text{ت}_{۱})\,\text{فر عہ}\backslash\text{فر ت}$

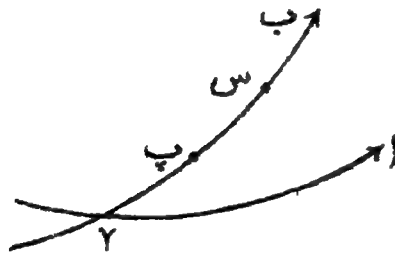
اِس لیے (ت۲ – ت۱) {۱ – ۰۰۲۷ء جم سہ قط² ضہ} = ۲ ک قط ضہ

یا ت۲ – ت۱ = ۲ ک \ {جم ضہ – ۰۰۲۷ء جم سہ قط ضہ}

اعتدالوں پر ضہ = ۰ اور انقلابوں پر ضہ = ± سہ، اِس لیے اعتدال پر سورج کے قطر کو نصف النہار عبور کرنے میں جو کوبی وقت لگتا ہے اُس میں اور انقلاب پر کے کوکبی وقت میں ذیل کی نسبت ہے

(جم سہ – ۰۰۲۷ء) \ (۱ – ۰۰۲۷ء جم سہ) = جم سہ – ۰۰۲۷ء جبا سہ

(۲۲۰) ۷۳ – مرکز کی مساوات –

فرض کروکہ خط استواء ♈ ا اور طریق الشمس ♈ ب (شکل ۶۵) ہے جہاں سورج کا محل س ہے اور سورج کے ظاہری مدار کا قریب ارضی (Perigee) پ ہے یعنے وہ نقطہ جس پر سورج زمین سے قریب ترین ہوتا ہے –

شکل (۶۵)

نیز فرض کروکہ ♈ پ = حہ، قریب ارضی کا طول بلد

پ س = و، سورج کی اصلی بے قاعدگی

♈ س = ٥ = حہ + و، سورج کا اصلی طول بلد

فرض کروکہ پورے سال کے لیے اُس ظاہری زاویہ کی اوسط قیمت ن ہے جو زمین سے کے مرکز سے سورج کے مرکز تک کھنچا ہوا سمتی وتر روزانہ عبور کرتا ہے۔ سورج کا اوسط طول بلد ل = ن ت + حہ سے بیان ہوتا ہے

جہاں ت، دِنوں میں وقت ہے اور حہ اوسط طولِ بلد کی قیمت ہے اُس آن پر جہاں سے وقت کی پیمائش ہوئی ہے۔ سورج کی اوسط بے قاعدگی ل ۔ حہ ہے اور اس کے جواب میں اصلی بے قاعدگی ⊙ ۔ حہ ہے۔

دفعہ ۵۲ میں ہم وہ رشتہ معلوم کر چکے ہیں جو ایک ناقصی مدار میں اصلی بے قاعدگی اور اوسط بے قاعدگی کے درمیان ہوتا ہے۔ محولہ بالا دفعہ کے ضابطہ میں و کی بجائے ⊙ ۔ حہ اور ط کی بجائے ل ۔ حہ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

⊙ = ل + (۲ز ۔ ۱/۲ ز^{۳}) جب (ل ۔ حہ) + ۵/۴ ز^{۲} جب (۲ل ۔ ۲حہ)

+ ۱۳/۱۲ ز^{۳} جب (۳ل ۔ ۳حہ)۔ (۱)

جہاں ز، زمین کے مدار کا خروج المرکز ہے۔

وہ رقمیں جن میں ز^{۳} شامل ہے اسقدر چھوٹی ہیں کہ اکثر مقاصد میں اِن کی ضرورت نہیں پڑتی۔ ہم انہیں حسب سابق نظر انداز کریں گے اور صرف یہ لکھیں گے

⊙ = ل + ۲ز جب (ل ۔ حہ) + ۵/۴ ز^{۲} جب (۲ل ۔ ۲حہ)۔۔۔ (۲)

پس ہمیں سورج کے اوسط طول بلد کی رقوم میں اس کے اصلی طول بلد کے لیے ایک جملہ حاصل ہو گیا۔

(۲۳۱) اِس سلسلہ کو اُلٹانے سے اور ز کی دوسری سے اعلیٰ قوتوں کو ترک کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ل = ⊙ ۔ ۲ز جب (⊙ ۔ حہ) + ۳/۴ ز^{۲} جب (۲⊙ ۔ ۲حہ)۔۔۔۔۔ (۳)

اِس سے سورج کا اوسط طول بلد اس کے اصلی طول بلد کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے۔

اب ز اور حہ کی عددی قیمتوں کا جاننا ضروری ہے اور ہم دکھائیں گے کہ سورج کے صعود مستقیم کے مسلسل مشاہدات سے یہ مقداریں کس طرح معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ ضابطہ (۲) کے ذریعہ کیا جاتا ہے۔ اِس ضابطہ کو

ہم لا = زجم حہ، ما = زجب حہ، ل = ن ت + صہ رکھ کر مستحیل کرینگے۔ اولاً بہت چھوٹی مقدار ز۲ کو نظر انداز کرنے سے تقریبی ضابطہ

ن ت + صہ = ◉ - ۲ لا جب ◉ + ۲ ما جم ◉ ‘......(۴)

حاصل ہوتا ہے۔ اِس مساوات میں چار نامعلوم مقداریں ن، صہ، لا، ما ہیں۔ انہیں معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ چند اوقات ت۱، ت۲، ت۳، تہ.... پر سورج کے صعود مستقیم کے مشاہدات سے اس کے طول بلد ◉۱، ◉۲، ◉۳، ◉ہ... کا ایک سلسلہ محسوب کر لیا گیا ہے۔ اِن میں کی ہر مقدار سے اوسط شمسی ایام کی وہ تعداد تعبیر ہوتی ہے جو ایک آن سے جہاں سے وقت کی پیمائش شروع ہوئی ہے گذر چکی ہے۔ ◉ کی ہر قیمت اور اس کے جواب میں ت کی قیمت ضابطہ (۴) میں درج کی جائے تو ن، صہ، لا، ما میں ایک خطی مساوات ملے گی۔ ایسی چار مساواتوں سے اِن چار مقداروں کی تعیین ہو جانی چاہیے اگرچہ مزید صحت کے لیے نتیجہ کی بنیاد بہت سے مشاہدات پر جو متعدد سالوں پر پھیلے ہوئے ہوں رکھنی چاہیے۔ پس لا اور ما اور اس لیے ز اور حہ تقریباً معلوم ہو جاتے ہیں۔ اِن کے ساتھ ہی ن اور صہ معلوم ہوتے ہیں اور اوسط طول بلد کا جملہ متعین ہو جاتا ہے۔ اب ہم مساوات (۳) کی اُس رقم میں جس میں ز۲ ہے ز اور حہ کی تقریبی قیمتیں درج کرتے ہیں کیونکہ یہ رقم بہت چھوٹی ہے اور اِس لیے اِس کی قیمت میں کوئی قابل قدر خطا واقع نہیں ہوگی اگرچہ ز اور حہ بالکل صحیح نہ ہوں۔ اس طرح ن، صہ، لا، ما کے درمیان ایک صحیح ترخطی مساوات حاصل ہوتی ہے اور ہر مشاہدے سے ایسی ایک مساوات ملے گی۔ اس طریقہ سے ز اور حہ کو حسب خواہش پوری صحت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

شمسی سال کا طول ۳۶۰\ن دن ہے اور بلاشبہ اگر ہم اس امر میں آزاد ہوتے کہ شمسی سال کو ۲۴۲۲ء۳۶۵ دنوں کا مان لیں (جیسا کہ ہم نے اکثر کیا ہے) تو ہم ن کو نامعلوم مقدار کے طور پر بیان نہ کرتے۔ لیکن یہاں یہ یاد دلانا ضروری ہے کہ ویسی ہی تحقیق سے جیسی کہ اوپر دی گئی ہے شمسی سال کی خود یہ قیمت

(۲۳۲) حاصل کیجا چکی ہے اور اِس لیے مساواتوں کے نظام سے ن معلوم کرلینے کے بعد ۳۶۰\ن حاصل ہوتا ہے۔ مقدار صہ زیر بحث آن پر سورج کا اوسط طول بلد ہے۔ پس ہمیں ل کے لیے وہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے جو ایک زیادہ ابتدائی طریقہ سے قبل ازیں معلوم کیا جاچکا ہے' دفعہ ۶۷ مثال ۴۔

اب صرف یہ رہ گیا ہے کہ مساواتوں (۲) اور (۳) کی عددی شکلیں زمین کے مدار کے خروج المرکز ز اور حہ کی اصلی قیمتیں درج کرکے معلوم کی جائیں۔ یہ قیمتیں سنہ ۱۹۰۰ء کے لیے حسب ذیل ہیں

ز = ۰،۰۱۶۷۵، حہ = ۲۸۱° ۱۳َ

اور اگرچہ اُن خللوں کی باعث جن کا سبب دوسرے سیارے ہیں یہ مقداریں ٹھیک ٹھیک مستقل نہیں ہیں تاہم سال بہ سال اِن کی تبدیلیاں اسقدر خفیف ہوتی ہیں کہ ہمارے موجودہ مقصد کے لیے کوئی اہمیت نہیں رکھتیں۔ اِن قیمتوں کو درج کرنے اور ایک نیم قطری زاویہ کی بجائے ۳۴۳۸َ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ہ = ل + ۱۱۵،۲َ جب (ل − ۲۸۱،۲°) + ۱،۲َ جب (۲ل − ۲۰۲،۴°) .. (۵)

ل = ہ − ۱۱۵،۲َ جب (ہ − ۲۸۱،۲°) + ۰،۷َ جب (۲ہ − ۲۰۲،۴°) .. (۶)

پس ہم حسب ذیل تقریبی بیانات دے سکتے ہیں:۔

کسی آن پر سُورج کا اصلی طول بلد ہ' اُسی آن پر اِس کے اوسط طول بلد ل میں وہ مقدار جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے جس کی تعریف مرکز کی مساوات کے طور پر دفعہ ۵۲ میں کیجا چکی ہے اور جس کے لیے اب ہم نے یہ جملہ

۱۱۵َ جب (ل − ۲۸۱°)

حاصل کیا ہے۔

کسی آن پر سورج کا اوسط طول بلد ل، اسی آن پر سورج کے اصلی طول بلد ⊙ میں مقدار

- ۱۱۵ٔ جیب (⊙ - ۸۱ ۲°)

جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ مرکز کی مساوات کبھی صفر نہیں ہوتی اِلّا آنکہ سورج اوجین میں سے ایک پر ہو۔

*مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ اگر قوس کے ثانیوں کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو ضابطہ (۵) ہو جاتا ہے

⊙ = ل + ۴۴ ۱۳ٔ جیب ل + ۶۰۰۰ٔ جم ل - ۶۷ٔ جیب ۲ ل + ۲۸ٔ جم ۲ ل

۴۷ ۔ وقت کی مساوات

اب ہم سورج کے صعود مستقیم عہ کو اس کے اوسط طول بلد ل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر سورج کا اصلی طول بلد ⊙ ہو تو دفعات ۲۷ اور ۳۷ سے

عہ = ⊙ - مس^۲ ½ سہ جیب ۲ ⊙ + ½ مس^۴ ½ سہ جیب ۴ ⊙،

⊙ = ل + ۲ ز جیب (ل - حہ) + ۵⁄۴ ز^۲ جیب (۲ ل - ۲ حہ)

(۲۲۳) عہ کے اس جملہ میں جو ل کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے متعدد رقمیں چھوٹے سروں کے ساتھ شامل ہوتی ہیں۔ ضابطوں میں ایسی رقموں کا رکھنا ضروری نہیں ہے جو اسقدر چھوٹی ہوں کہ ان سے کوئی قابل قدر اثر پیدا نہیں ہوتا اس لیے ہم ز اور مس^۲ ½ سہ کی کوئی وہ قوت یا قوتوں کا حاصل ضرب نہیں رکھیں گے جو ۱\۱۰۰۰ سے کم ہو۔ یہ شرط مس^۲ ½ سہ = ۱\۲۳،۲۱، ز = ۱\۵۹،۷۰، مس^۴ ½ سہ = ۱\۵۳۸،۷، ز مس^۲ ½ سہ = ۱\۱۳۸۵، اور ز^۲ = ۱\۳۵۶۴ کے سوا باقی سب کو خارج

کرتی ہے۔

ہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

عہ = ل + ۲ ز جب (ل - حہ) + ۵/۴ ز۲ جب ۲ (ل - حہ)

- مس۲ ۱/۲ سہ {جب ۲ ل + ۴ ز جب (ل - حہ) جم ۲ ل} + ۱/۲ مس۴ ۱/۲ سہ جب ۴ ل

اِسے لکھ سکتے ہیں

عہ = ل + ۲ ز جب (ل - حہ) - مس۲ ۱/۲ سہ جب ۲ ل + ۲ ز مس۲ ۱/۲ سہ جب (ل + حہ)

+ ۵/۴ ز۲ جب ۲ (ل - حہ) - ۲ ز مس۲ ۱/۲ سہ جب (۳ ل - حہ) + ۱/۲ مس۴ ۱/۲ سہ جب ۴ ل

چونکہ مقداریں ز۲، ز مس۲ ۱/۲ سہ اور مس۴ ۱/۲ سہ بہت چھوٹی ہیں اِس لیے جملہ (عہ - ل) کی پہلی دو رقمیں بہت ہی اہم ہیں اور دوسری ارقام زیر بحث مقصد کے لیے نظر انداز کی جا سکتی ہیں، اس لیے

عہ = ل + و

جہاں و = ۲ ز جب (ل - حہ) - مس۲ ۱/۲ سہ جب ۲ ل

مقدار و کو وقت کی مساوات کہتے ہیں۔ یہ مقدار سورج کے اوسط طول بلد میں جمع کرنی پڑتی ہے تاکہ اس کا صعود مستقیم حاصل ہو۔

و کو یہاں نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم اِس کو وقت میں ۲π نیم قطری زاویے فی ۲۴ گھنٹے کی شرح سے تحویل کرتے ہیں اور اس لیے گھنٹوں میں وقت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

۱۲ {۲ ز جب (ل - حہ) - مس۲ ۱/۲ سہ جب ۲ ل} / π

یا وقت کے ثانیوں میں

۱۳۷۵۱ {۲ ز جب (ل - حہ) - مس۲ ۱/۲ سہ جب ۲ ل}

اگر اس میں ز = ۰.۰۱۶۷۵، حہ = ۲۸۱° ۱۲ رکھا جائے تو تقریبی نتیجہ

عہ = ل + ۴۶۰ث جب ل + ۴۵۲ث جم ل - ۵۹۲ث جب ۲ ل

سال کو ۱/۴ ۳۶۵ ایام کا لیا جائے) ۔
(Oxford Second Public Exam. 1902.

مثال ۴ ۔ ثابت کرو کہ انقلاب گرما پر وقت کی مساوات میں تقریباً ۵۳ء ۰ ثانیہ فی گھنٹہ کا اضافہ ہوتا ہے، یہ مان لیا گیا ہے کہ اوسط سورج کی یومی حرکت قوس میں ۵۹ َ ۳۳ ً ۸ ہے ۔

(۱) سے وقت کی مساوات ملتی ہے ۰ ۹ ث جب ل + ۴۵۲ ث جم ل ۔ ۵۹۲ ث جب ۲ ل ۔ اگر ل میں مف ل کی ایک چھوٹی تبدیلی ہو تو اس میں

(۹۰ ث جم ل ۔ ۴۵۲ ث جب ل ۔ ۱۱۸۴ ث جم ۲ ل) مف ل

کا اضافہ ہوتا ہے ۔ ایک گھنٹہ میں مف ل = ۸۵ء ۴۷ ً یا نیم قطریوں میں ۰۰۰۲۷ ۰ء ۰۱ اس لیے وقت کی مساوات میں فی گھنٹہ تبدیلی ہے

مف ذ = ۰۴ء ۰ ث جم ل ۔ ۳۲۴ ء ۰ ث جب ل ۔ ۸۴۹ ء ۰ ث جم ۲ ل

مخصوص صورت میں فرض کرو کہ ل = ۹۰° تو مف و = ۵۲۵ ء ۰ ث

مثال ۵ ۔ ثابت کرو کہ وقت کی مساوات کی بڑی سے بڑی قیمت جو خروج المرکز سے پیدا ہوتی ہے ۲۴ ز /π گھنٹے ہے ۔

۷۵ ۔ وقت کی مساوات سے متعلق ضابطے ۔

اُن مختلف ضابطوں کو جو وقت کی مساوات سے متعلق ہیں اکٹھا کرنا سہولت بخش ہے ۔ فرض کرو کہ مشاہد طول بلد ل (گرینج کے مغرب) میں ہے اور کسی خاص آن پر وہ ظاہری شمسی وقت کا مشاہدہ کرتا ہے حسب ذیل ترقیم استعمال کی جائے گی :-

مہ ، سورج کا صعود مستقیم مشاہدہ کی آن پر ،
ظ ، ظاہری وقت " " " " "

ت ' مقامی اوسط وقت مُشاہدہ کی آن پر '

تہ ' مقامی کوکبی وقت " "

و ' وقت کی مساوات

و۰ ' وقت کی مساوات سابق گ ـ ا ـ ظا (گرینوچ اوسط ظہر) پر '

و۱ ' " " " آیندہ " " "

مہ۰ ' گرینوچ کوکبی وقت ہے سابق " " "

مہ۱ ' " " " آیندہ " " "

و کی تعریف (دیکھو صفحہ) سے

ت = ظ + و ' ....(۱)

مشاہدے کی آن پر گ ـ ا ـ و (گرینوچ اوسط وقت)

ظ + و + ل ہے اور یہ فرض کرنے سے کہ و یکساں طور پہ بدلتا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

و = و۰ + (ظ + و + ل)(و۱ ـ و۰)/۲۴ گ ' ....(۲)

نیز ع = تہ ـ ظ ' ....(۳)

جب گرینوچ اوسط وقت ت + ل ہو تو گرینوچ کوکبی وقت تہ + ل ہے اس لیے گذشتہ گرینوچ اوسط ظہر سے کوکبی وقفہ تہ + ل مہ۰ ہے اور یہ کوکبی وقفہ اوسط وقت میں جزو ضربی ۲۴ گ/(۲۴ گ + مہ۱ ـ مہ۰) کے ذریعہ تبدیل ہوتا ہے

اس لیے مساوات ملتی ہے

ت + ل = ۲۴ گ (تہ + ل ـ مہ۰)/(۲۴ گ + مہ۱ ـ مہ۰)

جس سے ہم حاصل کرتے ہیں

ت = تہ ـ مہ۰ ـ (مہ۱ ـ مہ۰)(تہ ـ مہ۰ + ل)/(۲۴ گ + مہ۱ ـ مہ۰) ' ...(۴)

مساواتوں (۱) ' (۲) ' (۳) ' (۴) سے جن میں چھ مقداریں ع ' ظ ' ت ' تہ ' و ' ل آتی ہیں ہم کوئی چار معلوم کرسکتے ہیں جبکہ دو دوسری دیگئی

ہوں — یہ مان لیا گیا ہے کہ ایفیمرس سے محصلہ مقداریں و، و، م، م اس دن کے لیے مستقل ہیں —

مثال ۱ — ثابت کرو کہ کسی مقام پر کسی آن کوکبی وقت تہ، اوسط وقت ت، سورج کا صعود مستقیم عہ، اور وقت کی مساوات و میں حسب ذیل رشتہ ہوتا ہے :—

تہ - عہ + و - ت = ۰

مثال ۲ — اگر گرنوچ اوسط وقت ت ہو اور گذشتہ اور آیندہ گرنوچ اوسط ظہروں پر کوکبی اوقات اور وقت کی مساواتیں مہ، مہ، و، و ہوں اور اگر مشاہدہ کردہ ظاہری شمسی وقت ظ ہو تو طول بلد معلوم کرو اور ثابت کرو کہ مقامی کوکبی وقت ہے

مہ + و + ت (مہ + و - مہ - و) \ ۲۴گ + ظ

[Coll. Exam.]

(۲۳۶) مثال ۳ — اگر مقام گرنوچ اوسط وقت کے ت اور تَ گھنٹوں پر سورج کے ساعتی زاویے عہ، عہَ (درجوں میں) ہوں تو ثابت کرو کہ گذشتہ اور آیندہ اوسط ظہروں پر وقت کی مساواتیں ایک گھنٹہ کی کسروں میں علی الترتیب حسب ذیل ہیں :—

عہَ ت - عہ تَ / ۱۵ (تَ - ت) ، ۲۴ + عہَ (۲۴ - ت) - عہ (۲۴ - تَ) / ۱۵ (تَ - ت)

[Math. Trip.]

مثال ۴ — مساوات (۲) سے ثابت کرو کہ

و = ۲۴گ و \ (۲۴گ + و - و) + (ظ + ل) (و - و) \ (۲۴گ + و - و)

اور صفحہ ماسبق پر دئے ہوے ضابطوں سے ثابت کرو کہ گرنوچ پر متناظر اوسط وقت

۲۴گ (ظ + و + ل) \ (۲۴گ + و - و)

[Math. Trip.]

ہے —

مثال ۵ — نیویارک (طول بلد ۷۳° ۵۸′ ۲۴٫۱۶″ غ) پر بتاریخ یکم اکتوبر بوقت ظاہری ظہر کوکبی وقت معلوم کرو ۔ یہ دیا گیا ہے کہ گرینوچ اوسط ظہر پر بتاریخ یکم و دوم اکتوبر وقت کی مساوات کی عددی قیمتیں علی الترتیب ۱۰م ۲۸٫۲۳ش اور ۱۰م ۲۸٫۴۲ش ہیں اور ان دنوں میں گرینوچ اوسط ظہر پر کوکبی اوقات علی الترتیب ۱۲گ ۴۰م ۲۲٫۵۷ش اور ۱۲گ ۴۴م ۱۷٫۵۴ش ہیں ۔

[Math. Trip.]

مثال ۶ — بتاریخ ۱۵ اور ۱۶ اپریل ۱۸۹۵ء گرینوچ اوسط ظہر پر وقت کی مساوات ۱٫۵۷ش اور ۱۳٫۰۹ش ہے جن کو علی الترتیب اوسط وقت میں سے تفریق اور اس میں جمع کرنا ہے ۔ سورج کا ظاہری ساعتی زاویہ ایک مقام پر جو گرینوچ سے ۴° مشرق میں ہے بتاریخ ۱۶ اپریل مقامی اوسط وقت ۱۱گ ۵۸م پر معلوم کرو ۔

[Coll. Exam.]

۷۶ — وقت کی مساوات کی ترسیمی تعبیر —

دفعہ ۷۴ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر وقت کی مساوات و کو اوسط شمسی وقت کے گھنٹوں میں بیان کیا جائے تو وہ کافی تقریب تک

و ≡ ۱۲{ ۲ ز جب (ل − ح) − مس² ½ سہ جب ۲ ل }\π

حاصل ہوتی ہے ۔ اس جملہ میں حسب ذیل تقریبی اندراجات

مس² ½ سہ = ۱\۲۳٫۲ ، ز = ۱\۵۹٫۷ ، ح = ۳۶۰° − ۷۹°

کرنے سے تحویل کے بعد (یا راست ضابطہ (۱) سے صفحہ ۳۶۰) حاصل ہوتا ہے

و ≡ ۰٫۱۲۸گ جب (ل + ۷۹°) − ۰٫۱۶۵گ جب ۲ ل

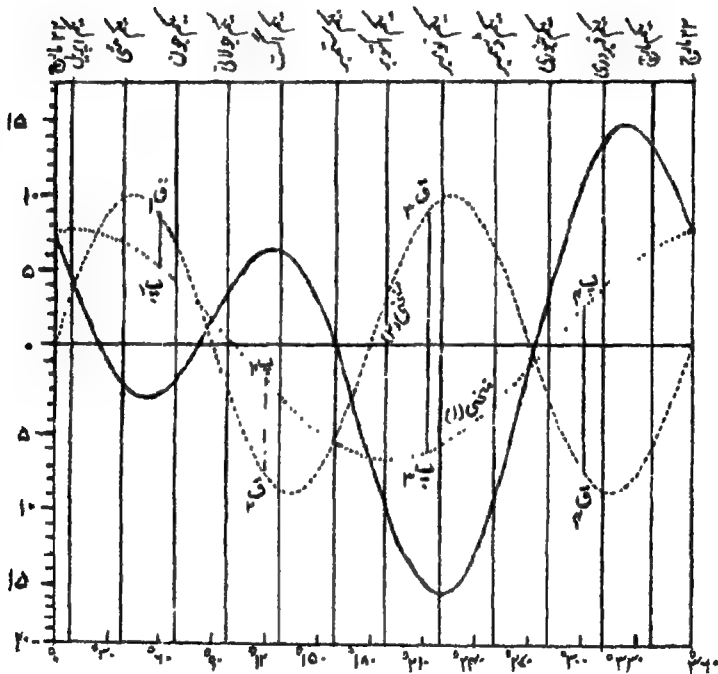
≡ ۷٫۶۸م جب (ل + ۷۹°) − ۹٫۹۰م جب ۲ ل

اب ہم وہ دو منحنی مرتسم کرتے ہیں (شکل ۶۶) جن کی مساواتیں

ما = ۷٫۶۸م جب (ل + ۷۹°) .... (۱)

اور

ما ≡ ۹٫۹۰م جب ۲ ل .... (۲)

ہیں۔ شکل میں ل کو فصلہ کے طور پر لیا گیا ہے اور معین مثبت یا منفی لیے گئے ہیں جیسا کہ بائیں جانب کے اُس کھڑے خط سے ظاہر ہے جس پر پیمانہ درج ہے۔ صفر سے لیکر ۳۶۰° تک ہر طول بلد کے لیے یہ منحنی مرتسم کیے جاتے ہیں (۲۳۷) اور اس لیے یہ ایک سال کے اعتدال ربیع سے دوسرے سال کے اعتدال ربیع تک کارآمد ہیں۔ شکل بغیر کسی قابل قدر تغیر و تبدل کے سالہا سال تک استعمال کی جاسکتی ہے۔

شکل (۶۶)

منحنیوں کا استعمال اس واقعہ پر مبنی ہوتا ہے کہ وقت کی مساوات ≡ منحنی (۱) کا معین ـ منحنی (۲) کا معین

معمولی قرارداد کی بموجب یہاں یہ سمجھ لیا گیا ہے کہ افقی محور کے اوپر معین مثبت ہیں اور اس کے نیچے منفی ۔

مثلاً ۲۲ ہر مئی کو وقت کی مساوات ق۱ پ۱ ہے اور منفی ہے۔ ۲۲ ہر جولائی کو وقت کی مساوات ق۲ پ۲ ہے اور مثبت ہے۔ ۲۲ ہر اکتوبر کو وہ ق۳ پ۳ ہے اور منفی، ۲۲ ہر جنوری کو ق۴ پ۴ ہے اور مثبت ۔

اس طریقہ پر منحنیوں (۱) اور (۲) کے معینوں کا فرق اس کی مناسب علامت کے ساتھ لیکر اسے معین قرار دیں تو شکل ۶۶ کا وہ مسلسل منحنی حاصل ہوتا ہے جس کے معین، وقت کی مساوات کو سال کے ہر دن کے لیے تعبیر کرتے ہیں ۔

(۲۳۸) شکل (۶۶) میں چار مقامات ایسے ہیں جن پر منحنی (۱) اور (۲) متقاطع ہوتے ہیں اور اس لیے اِن مقامات پر وقت کی مساوات صفر ہے ۔ پس یہ معلوم ہوا کہ وقت کی مساوات سال میں چار دفعہ معدوم ہوتی ہے اور مسلسل منحنی افقی محور کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے جن سے متناظر تاریخیں معلوم ہوتی ہیں ۔

یہ امر کہ وقت کی مساوات سال میں کم از کم چار دفعہ معدوم ہونی چاہئے دوسرے طریقہ سے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے ۔ ہم فرض کریں گے کہ ت، وقت کی مساوات کا وہ حصہ ہے جو میل الشمس کے میلان کی وجہ سے ہے اور تَ وہ حصہ ہے جو خروج المرکز کی وجہ سے ہے ۔ فرض کرو کہ بلا لحاظ علامت تَ کی بڑی سے بڑی قیمت ک ہے تب ک، ت کی کسی قیمت سے بڑا ہے ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ت کی قیمت ۹ م ۹۰ ث ہے اور تَ، ۷ م ۶۸ ث سے بڑا نہیں ہو سکتا ۔

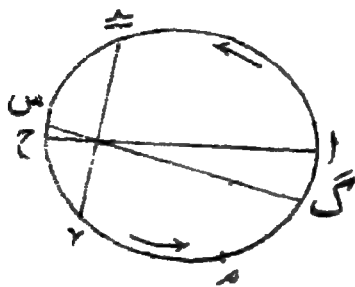
اعتدال ربیع سے انقلاب گرما تک ت منفی ہونا چاہیے کیونکہ جہاں تک کہ میلان کی وجہ سے ناساویت پیدا ہوتی ہے اوسط سورج کا صعود مستقیم اصل سورج کے صعود مستقیم سے بڑا ہوتا ہے ۔ اس لیے

اوسط سورج نصف النہار کو اصلی سورج کے بعد عبور کرتا ہے اور اس لیے اوسط وقت معلوم کرنے کے لیے ظاہری وقت میں عمل تفریق کرنا ہوتا ہے۔ اسی طرح کے استدلال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ انقلاب گرما سے اعتدال خریف تک ت مثبت ہے، اعتدال خریف سے انقلاب سرما تک ت منفی ہے، اور انقلاب سرما سے اعتدال ربیع تک ت مثبت ہے۔ دونوں اعتدال اور دونوں انقلابوں پر ت صفر ہے۔ وقت کی مساوات کے اُس حصہ کے متعلق جو خروج المرکز کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ بعید ارضی (Apogee) اور قریب ارضی (Perigee) دونوں پر تَ صفر ہے اور چونکہ قریب ارضی سے بعید ارضی تک اصلی سورج اپنے اوسط مقام سے آگے رہتا ہے اس لیے تَ کی قیمت مسلسل مثبت ہونی چاہیے اسی طرح بعید ارضی سے قریب ارضی تک تمام راستہ پر تَ منفی ہونا چاہیے

فرض کرو کہ قریب ارضی اور بعید ارضی علی الترتیب ح، ۲ (شکل ٦٧) ہیں، انقلاب گرما اور سرما پر سورج کے محل گ، س ہیں اور اعتدالی نقطے ۲ ہیں۔

فرض کرو کہ م وہ نقطہ ہے جہاں سورج اُس آن رہتا ہے جبکہ ت (جو ۲ پر اور گ پر صفر ہے) اپنی بڑی سے بڑی منفی قیمت رکھتا ہے۔ اب چونکہ وقت کی مساوات و، ت + تَ ہے ہم دیکھتے ہیں کہ ح سے ۲ تک و کی قیمت مسلسل مثبت ہونی چاہیے کیونکہ ت اور تَ دونوں مثبت ہیں۔

نقطہ م پر و = تَ - ت اور چونکہ تَ کبھی بھی ک کے مساوی نہیں ہو سکتا اس لیے م پر و کو منفی ہونا چاہیے۔ اب چونکہ و، ۲ پر مثبت ہے، م پر منفی اور پھر گ پر مثبت اس لیے ۲ اور م کے درمیان کوئی ایک نقطہ، اور م اور گ کے درمیان ایک دوسرا نقطہ ہونا چاہیے جہاں و = ۰ ۔ پس وقت کی مساوات، اعتدال ربیع اور انقلاب گرما کے درمیان کم از کم دو مرتبہ صفر ہونی چاہیے۔ (۲۳۹)

گ سے ا تک ت اور تَ دونوں مثبت ہیں اور اس لیے انقلاب
گرما سے بعید ارضی تک و مسلسل مثبت ہوتا ہے۔ لیکن ا سے ـــ
تک تَ منفی ہے اور چونکہ ـــ پر ت صفر ہے اور تَ اب بھی منفی
ہے اس لیے و، ـــ پر منفی اور ا پر مثبت ہونا چاہیے۔ پس نتیجہ
نکلتا ہے کہ و، ا اور ـــ کے درمیان کسی ایک نقطہ پر صفر ہونا چاہیے
اور اس طرح وقت کی مساوات کم از کم پھر ایک مرتبہ بعید ارضی اور اعتدال
خریف کے درمیان صفر ہونی چاہیے۔

شکل (۶۷)

ـــ سے س تک ت اور تَ مسلسل منفی ہیں اور اس لیے
وقت کی مساوات مدار کے اِن نقطوں پر معدوم نہیں ہو سکتی۔ ح پر و
پھر مثبت ہو جاتا ہے اور اس لیے وہ س اور ح کے درمیان کم از کم
ایک مرتبہ صفر ہونا چاہیے۔

پس معلوم ہوا کہ وقت کی مساوات اعتدال ربیعی اور انقلاب
گرما کے درمیان کم از کم دو مرتبہ صفر ہونی چاہیے، بعید ارضی اور اعتدال خریف
کے درمیان کم از کم ایک مرتبہ اور انقلاب گرما اور قریب ارضی کے درمیان
کم از کم ایک مرتبہ۔

مثال ۱۔ اگر ہم لا کو سورج کے اوسط طول بلد ل کو نہ سمجھیں تو

بتاؤ کہ وہ دن جن میں وقت کی مساوات صفر ہوتی ہے منحنی ما = لا (۱ + لا^۲)^{-½} اور ایک خط مستقیم کے نقاط تقاطع سے ترسیمی طور پر معلوم کیے جا سکتے ہیں، اور اگر اس خط کی مساوات

ما = ۰٫۰۷ لا + ۰٫۳۸

ہو تو زیر بحث ایام کی تخمین تقریبی طور پر کرو۔

مساوات مس^۲ ½ سہ جب ۲ ل = ۲ ز جب (ل − ح) میں مس ل = لا رکھو تو لا میں محصلہ مساوات صریحاً ان دو مساواتوں

ما = ز لا جم ح مم^۲ ½ سہ − ز جب ح مم^۲ ½ سہ،

ما = لا (۱ + لا^۲)^{-½}

سے ما کو ساقط کرنے کا نتیجہ ہے۔

مثال ۲ — یہ بتایا جا چکا ہے کہ وقت کی مساوات ثانیوں میں

۹۰ جب ل + ۴۵۲ جم ل − ۵۹۲ جب ۲ ل

ہے جہاں ل، سورج کا اوسط طول بلد ہے۔ اس جملہ سے ثابت کرو کہ وقت کی مساوات سال میں کم از کم چار دفعہ معدوم ہوتی ہے۔ (۲۴۰)

اگر ہم اس جملہ میں ل کی بجائے ۰°، ۴۵° یکے بعد دیگرے رکھیں تو اس کی علامت مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتی ہے، اس لیے ۰° اور ۴۵° کے درمیان ل کی ایک ایسی قیمت ہونی چاہیئے جو مساوات

۹۰ جب ل + ۴۵۲ جم ل − ۵۹۲ جب ۲ ل = ۰

کی ایک اصل ہو۔

نیز ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان، ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان، اور ۱۸۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ل کی قیمتوں کے لیے علامت کی مزید تبدیلیاں ہیں۔ اس لیے مساوات بالا کی چار حقیقی اصلیں ہونی چاہئیں اور جب چند دیگر چھوٹی رقمیں بھی ملحوظ رکھی جائیں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ اصلیں تقریباً

۲۳°، ۸۳°، ۱۵۹°، ۲۷۲°

ہیں اور اِن کے جواب میں وہ تاریخیں جن پر وقت کی مساوات صفر ہوتی ہے حسب ذیل ہیں

۱۵ اپریل، ۱۴ جون، ۳۱ اگست، ۲۴ دسمبر

مثال ۳ — اگر اُن چار موقعوں پر جبکہ وقت کی مساوات صفر ہوتی ہے شمسی طول بلد ل۱، ل۲، ل۳، ل۴ ہوں تو ثابت کرو کہ اِن طول بلدوں کا مجموعہ ۵۴۰° ہونا چاہیے اگر ز کا مربع اور مس ½ سہ کی چوتھی وقت نظر انداز کی جائے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے ۲ ز جب (ل - حہ) = مس² ½ سہ جب ۲ ل

اس میں لا = مس ل، م = ز جم حہ مم² ½ سہ، ن = ز جب حہ مم² ½ سہ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

م² لا⁴ = ۲ م ن لا³ + (م² + ن² - ۱) لا² - ۲ م ن لا + ن² = ۰

اِس مساوات میں لا³ اور لا کے سر مساوی ہیں اور اگر ہم اِس واقعہ کو طول بلدوں ل۱، ل۲، ل۳، ل۴ کی رقوم میں جو اس مساوات کی چار اصلیں ہیں بیان کریں تو ہمیں شرط ملتی ہے

مس (ل۱ + ل۲ + ل۳ + ل۴) = ۰

اِس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ ل۱ + ل۲ + ل۳ + ل۴ = ۱۸۰° × ک جہاں ک ایک صحیح عدد ہے۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں (مثال ۲) کہ ل۱ > ۹۰°، ل۴ > ۲۷۰°، اِس لیے ک > ۲۔ نیز ل۱ + ل۲ < ۱۸۰°، ل۳ < ۱۸۰° اور ل۴ < ۳۶۰° اِس لیے ک < ۴۔ اِس لیے ک کی قیمت جو قابل قبول ہے وہ صرف ۳ ہے۔ اس لیے

ل۱ + ل۲ + ل۳ + ل۴ = ۵۴۰°

یہ دکھانا آسان ہے کہ

جب ل۱ + جب ل۲ + جب ل۳ + جب ل۴ + جب ل۱ جب ل۲ جب ل۳ + جب ل۱ جب ل۲ جب ل۴ + جب ل۱ جب ل۳ جب ل۴

+ جب ل جب ل۲ + جب ل۲ جب ل۳ جب ل۲ = ۰

مثال ۴۔ اگر زمین کے مدار کا خروج المرکز $\frac{1}{60}$ ہو، طریق الشمس کے میلان کی جیب التمام $\frac{11}{12}$، اور اعتدالین کے خط کو محور اعظم پر عمود لیا جائے تو ثابت کرو کہ جب وقت کی مساوات، خروج المرکز، اور میلان دونوں کی وجہ سے عدداً اعظم ہوتی ہے تو سورج کے طول بلد وہ زاویے ہیں جن کی جیوب تقریباً ۰٫۱۶۱ اور -۰٫۹۸۰ ہیں۔

[Math. Trip. 1.]

وقت کی مساوات ہے

۲ ز جب (ل - حہ) - مس۲ $\frac{1}{2}$ سہ جب ۲ ل

یہ حہ = ۹۰° کے لیے اعظم ہوتی ہے جبکہ

ز جب ل - مس۲ $\frac{1}{2}$ سہ جم ۲ ل = ۰

دیے ہوئے مستقل درج کرنے سے یہ مساوات $\frac{1}{60}$ جب ل - $\frac{1}{24}$ جم ۲ ل = ۰ ہوتی ہے اس لیے جب ل میں ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں دیے ہوئے اعداد ہیں۔

۷۷۔ وقت کی مقیم مساوات کی عام تحقیق۔

(۲۴۱)

اب ہم طریق الشمس کے میلان یا زمین کے مدار کے خروج المرکز کی بابت کوئی مفروضہ قائم کیے بغیر معلوم کریں گے کہ وقت کی مساوات کب اعظم یا اقل ہوتی ہے۔ لیکن ہم یہ فرض کریں گے کہ سورج کے گرد زمین کی حرکت ایک ثابت قطع ناقص میں واقع ہوتی ہے اور خط استواء کی حرکت نظر انداز کی گئی ہے۔ دفعہ ۲۵ سے ضروری مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور وہ حسب ذیل ہیں:

مس و = ر $\sqrt{1 - ز^2}$ جب ع / (جم ع - ز)، ک = ع - ز جب ع،

مس عہ = جم سہ مس ە، ە = و + حہ

جہاں اصلی، اوسط اور خروج المرکزی بے قاعدگیاں و، ط، ع ہیں اور سورج کا اصلی طول بلد ○ ہے، مدار کا خروج المرکز ز، اور حضیض کا طول بلد حہ۔
وقت ت کے لحاظ سے اِن مساواتوں کو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\sqrt{1-\text{ز}^2}}{1-\text{ز جم ع}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} \text{،} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$(1-\text{ز جم ع})\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \text{،} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$(\text{جم}^2\odot + \text{جم}^2\text{سہ جب}^2\odot)\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرت}} = \text{جم سہ}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \text{،} \quad \ldots\ldots (3)$$

وقت کی مساوات سورج کے اوسط طول بلد (ط + حہ) کو اس کے صعود مستقیم عہ میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور جب وقت کی مساوات مقیم ہوتی ہے تو ت کے لحاظ سے اس کا تفرقی سر صفر ہوتا ہے، اس لیے

$$\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$$

یا تفرقی سروں کے اسقاط سے

$$(1-\text{ز جم عہ})^2(\text{جم}^2\odot + \text{جم}^2\text{سہ جب}^2\odot) = \sqrt{1-\text{ز}^2}\ \text{جم سہ}$$

قطع ناقص کی ہندسی خاصیتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$(1-\text{ز}^2) = (1-\text{ز جم عہ})\{1+\text{ز جم}(\odot - \text{حہ})\}$$

اس لیے

$$(1-\text{ز}^2)^{\frac{3}{2}}(\text{جم}^2\odot + \text{جم}^2\text{سہ جب}^2\odot) = \text{جم سہ}\{1+\text{ز جم}(\odot - \text{حہ})\}^2$$

اِس ضابطہ میں ز کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے اور یہ ○ کی تعیین کے لیے ایک عام مساوات ہے جبکہ وقت کی مساوات مقیم ہو۔

(۲۴۲) مثال ۱۔ ثابت کرو کہ وقت کی مساوات کی مقیم قیمتیں اُس وقت

واقع ہوتی ہیں جبکہ سورج کے سمتی قطر کا ظِل خط اُستواء کے مُستوی پر، اوسط فاصلہ ا کا $(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}})^{\frac{1}{2}} (\text{جم سہ})^{\frac{1}{2}}$ گنا ہو جہاں ز مدار کا خروج المرکز اور سہ طریق الشمس کا میلان ہے۔

فرض کرو کہ یہ ظِل غہ ہے، تب اگر سورج کا میل ضہ ہو تو

$$\text{غہ} = \text{ا}(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}})\,\text{جم ضہ} \Big/ \left\{\text{۱} + \text{ز جم}(\odot - \text{حہ})\right\}$$

لیکن

$$\text{جم ضہ} = \left(\text{جم}^{\text{۲}}\odot + \text{جم}^{\text{۲}}\text{سہ جب}^{\text{۲}}\odot\right)^{\frac{1}{2}}$$

اور اوپر جو ثابت ہو چکا ہے اُس سے

$$\frac{\left(\text{جم}^{\text{۲}}\odot + \text{جم}^{\text{۲}}\text{سہ جب}^{\text{۲}}\odot\right)^{\frac{1}{2}}}{\text{۱} + \text{ز جم}(\odot - \text{حہ})} = \frac{(\text{جم سہ})^{\frac{1}{2}}}{(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}})^{\frac{1}{2}}}$$

اِس لیے

$$\text{غہ} = \text{ا}(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}})^{\frac{1}{2}}(\text{جم سہ})^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۲ ــــ فرض کرو کہ زمین کے لحاظ سے سورج کا طریق ٹھیک ایک قطع ناقص ہے جس کے ایک ماسکہ پر زمین ہے۔ فرض کرو کہ اِس قطع ناقص کا ظِل خط اُستواء کے مستوی پر لیکر ایک دوسرا قطع ناقص حاصل کیا گیا ہے۔ تب سورج کے محل کے ظِل جبکہ وقت کی مساوات بڑی سے بڑی ہو اِس دوسرے قطع ناقص اور ایک دائرہ کے نقاط تقاطع ہیں جس کا مرکز زمین ہے اور جس کا رقبہ اِس قطع ناقص کے رقبہ کے مساوی ہے۔

مثال ۳ ــــ عام صورت میں ثابت کرو کہ خروج المرکز خواہ کچھ ہی ہو مرکز کی مساوات اعظم ہوتی ہے جبکہ سمتی قطر، محور اعظم اور محور اصغر کے درمیان اوسط ہندسی ہو۔

۷۸ ــــ موسموں کا سبب ــ

مساوات میں سورج کا ظاہری سالانہ راستہ اعتدالی اور انقلابی نقطوں سے

چار ربعوں میں تقسیم ہے۔ ان کے جواب میں وقت کے جو چار وقفے ہیں ان کو موسم بہار، گرما، خریف اور سرما کہتے ہیں۔ بہار شروع ہوتا ہے جبکہ سورج راس الحمل میں داخل ہوتا ہے یعنے جبکہ اس کا طول بلد صفر ہے۔ جب سورج انقلابی نقطہ (طول بلد = ۹۰°) پر پہنچتا ہے تو گرما کا آغاز ہوتا ہے۔ موسم خریف شروع ہوتا ہے جبکہ سورج راس المیزان (طول بلد = ۱۸۰°) میں داخل ہوتا ہے۔ سرما کا آغاز اس وقت ہوتا ہے جبکہ سورج کا طول بلد ۲۷۰° ہوتا ہے، اور اس کا اختتام اس وقت جبکہ سورج پھر راس الحمل میں داخل ہوتا ہے۔

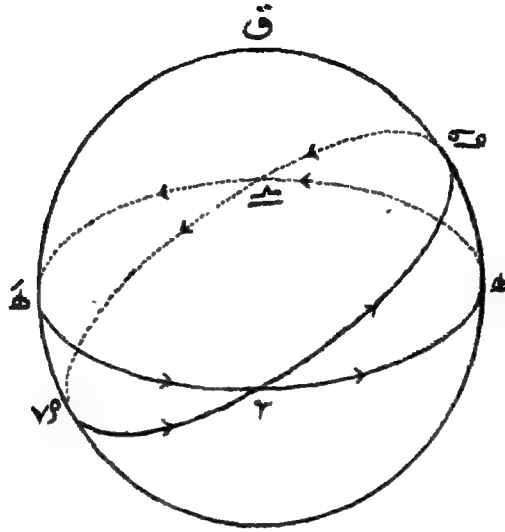
زمین کے کرۂ ہوائی کے جوّیاتی حالات میں تبدیلیاں جو اس مظہر کا سبب ہیں جس کو موسموں کا تغیر کہتے ہیں خاص کر ان تبدیلیوں سے متعین کیجاتی ہیں جو سورج سے پہنچنے والی حرارت کی مقدار میں واقع ہوتی ہیں جیسے جیسے سال آگے بڑھتا ہے۔

حرارت کی مقدار جو سورج سے زمین کی سطح پر کے کسی مقام پر پہنچتی ہے دو چیزوں پر منحصر ہوتی ہے (۱) گھنٹوں کی اس تعداد پر جن میں سورج افق کے اوپر رہتا ہے اور (۲) بوقت ظہر سورج کے راسی فاصلہ پر۔

ایک ایسے مقام پر جو عرض بلد ف میں واقع ہے طلوع آفتاب سے غروب آفتاب تک وقفہ = ۲ ھ \ π ہے جہاں ھ نیم قطری زاویوں میں وہ زاویہ ہے جو مساوات　　(۳۴۴)

جم ھ = - مس ف مس ضہ

سے حاصل ہوتا ہے، سورج کا راسی فاصلہ بوقت ظہر ف - ضہ ہے اور ضہ اس کا میل ہے۔

جب سورج طریق الشمس پر راس الحمل کے نقطہ سے حرکت کرتا ہے تو اس کا میل مثبت ہوتا ہے (دیکھو شکل ۶۸) اور جب سورج سرطان کے پہلے نقطہ پر جس کی علامت ♋ ہے پہنچتا ہے تو یہ میل انقلاب گرما پر اعظم قیمت اختیار کرتا ہے، اس وقت اس کا میل طریق الشمس کے میلان کے مساوی ہوتا ہے یعنے ۲۳° ۲۷'۔ اس نقطہ سے شمسی میل گھٹنے لگتا ہے تا آنکہ

شکل (۶۸)

اعتدال خریف ♎ پر صفر ہو جاتا ہے۔ اعتدال خریف سے میل منفی ہوجاتا ہے اور گھٹتے گھٹتے جدی میں جس کی علامت ♑ ہے انقلاب سرما پر اقل (−۲۳° ۲۷′) ہوتا ہے اور اس کے بعد پھر ایک مرتبہ بڑھنے لگتا ہے اور اگلے اعتدال پر پھر معدوم ہوتا ہے۔

موسمی تبدیلیوں پر غور کرنے کے لیے زمین کی سطح کو پانچ منطقات میں تقسیم کرنا سہولت بخش ہے۔ یہ منطقات خط استواء کے متوازی دائروں سے محدود ہوتے ہیں جو عرض بلد ±۲۳° ۲۷′ اور ±۶۶° ۳۳′ میں واقع ہیں۔ وہ منطقہ جو خط اُستواء کے شمال اور جنوب میں ۲۳° ۲۷′ کے توازیوں کے درمیان ہے منطقہ حارہ کہلاتا ہے اور اِس کو محدود کرنے والے شمالی اور جنوبی دائرے خط سرطان اور خط جدی کہلاتے ہیں۔ شمال اور جنوب میں عرض بلد ۶۶° ۳۳′ کے توازی دائرہ قطب شمالی اور دائرہ قطب جنوبی کہلاتے ہیں۔ وہ منطقہ جو دائرہ قطب شمالی اور خط سرطان کے

درمیان ہے منطقہ معتدلہ شمالی کہلاتا ہے اور وہ جو دائرہ قطب جنوبی اور خط جدی کے درمیان ہے منطقہ معتدلہ جنوبی کہلاتا ہے۔ بالآخر وہ علاقے جو قطب شمالی اور قطب جنوبی کے گرد دائرہ قطب شمالی اور دائرہ قطب جنوبی سے محدود ہیں منطقہ منجمد شمالی اور منطقہ منجمد جنوبی کہلاتے ہیں۔

انقلاب گرما کے وقت ضہ = ۲۳° ۲۷' اور اس لیے دائرہ قطب شمالی کے کسی نقطہ کے لیے مس فہ مس ضہ = ۱۔ ان حالات کے تحت سورج کا ساعتی زاویہ طلوع اور غروب پر ۱۸۰° ہے یعنے سورج کا یومی راستہ اس وقت خط استواء کے متوازی ایک دائرہ ہے جو افق کو نقطہ شمالی پر مس کرتا ہے، اس لیے نیم شب پر اس کی قرص کا نصف حصہ نظر آئے گا (ہم یہاں انعطاف کے اثر کو ملحوظ نہیں رکھ رہے ہیں) مشاہد جیسے جیسے قطب کی طرف بڑھیگا منطقہ منجمد کے اندر سورج بغیر غروب ہوئے متعدد ایام تک افق کے اوپر رہے گا۔ خود قطب پر مشاہد کو سورج بوقت اعتدال افق کے گرد حرکت کرتا نظر آئے گا اور اعتدال کے بعد وہ آسمان کے گرداگرد ایک لولب مرتسم کرے گا اور افق کے اوپر اس کا ارتفاع بتدریج بڑھتا جائے گا تاآنکہ بوقت انقلاب اس کا یومی راستہ ۲۳° ۲۷' کے ارتفاع پر افق کے متوازی تقریباً ایک دائرہ ہو گا۔ انقلاب کے بعد وہ افق کی جانب ایک مشابہ لولب منحنی میں واپس ہوگا اور افق پر اعتدال خریف کے وقت پہنچیگا۔ موسم سرما میں نصف سال تک سورج مسلسل افق کے نیچے رہے گا۔

منطقہ معتدلہ جنوبی اور منطقہ منجمد جنوبی میں مظاہر متناظر شمالی منطقوں کے مظاہر کے مشابہ ہوں گے لیکن ان کا وقوع سال کے مخالف زمانوں میں ہوگا۔ مثلاً جنوبی نیم کرہ ارض کا موسم بہار وقت کے نکتہ نظر سے شمالی نیم کرہ کے موسم خریف کے ہم زمان ہوگا اسی طرح جنوب کا سرما شمال کے گرما اور شمال کا سرما جنوب کے گرما کے ہم زماں ہوگا۔

منطقہ حارہ میں حالات حسب ذیل ہوتے ہیں :۔ خطِ اُستوا پر چونکہ فہ = ۰ ، اس لیے (۱) سے جم ھ = ۰ . خواہ ضہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اِسلیے ھ = $\frac{۱}{۲}$ π یعنے دن کا طول پورے سال ۱۲ گھنٹہ رہتا ہے۔ لیکن سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ دن بہ دن متغیر ہوگا۔ اعتدال ربیع پر سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ تقریباً صفر کے مساوی ہوگا (یہ ٹھیک صفر کے مساوی ہوگا اگر سورج اُس مقام کے نصف النہار کو اُس وقت عبور کرے جبکہ وہ راس الحمل کے نقطہ میں سے گذر رہا ہو)۔ جب موسم بہار شروع ہوکر بڑھنے لگتا ہے یہ نصف النہاری راسی فاصلہ انقلاب تک بتدریج بڑھے گا اور انقلاب کے وقت سورج کا تکبد تقریباً راس کے ۲۳° ۲۷′ شمال میں واقع ہوگا۔ اعتدال خریف پر سورج پھر بوقت ظہر تقریباً راس میں سے گذرے گا اور انقلاب سرما پر راس کے ۲۳° ۲۷′ جنوب میں تکبد کرے گا۔ اُن مقامات پر جو خط اُستوا اور خط جدی یا خط سرطان کے درمیان واقع ہیں حرارت کی مقدار جو سورج سے پہنچیگی سال میں دو مرتبہ اعظم قیمت اختیار کریگی اور اُسوقت سورج کا میل اُس مقام کے عرض بلد کے مساوی ہوگا۔ یہاں ہم نے صرف اُس حد تک غور کیا ہے جس حد تک ظہر پر سورج کے راسی فاصلہ کے اثر کا تعلق ہے۔

اگرچہ وہ چار حصے جن میں طریق الشمس کا بڑا دائرہ اعتدالوں اور انقلابوں سے تقسیم ہوا ہے طول میں مساوی ہیں لیکن اِن حصوں کو طے کرنے میں جو وقت صرف ہوتے ہیں وہ مساوی نہیں ہوتے۔

موسموں کی مدتیں معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۷۳ کی مساوات (۳) استعمال ہوتی ہے جو سورج کے اوسط طول بلد اور اصلی طول بلد کے درمیان ایک رشتہ ہے یعنی

ل = ہ − ۲ ز جب (ہ − حہ) + $\frac{۳}{۲}$ ز۲ جب ۲ (ہ − حہ)

ہم اپنے موجودہ مقصد کے لیے اِس جملہ کی تیسری رقم کو نظر انداز کرسکتے ہیں اور صرف یہ لکھ سکتے ہیں

ل = ہ − ۲ ز جب (ہ − حہ)

جب سورج ♈ میں ہو تو ہ = ۰ اور اس آن سورج کے اوسط طول بلد کو ل. سے تعبیر کرنے سے

ل. = ۲ ز جب حہ

اسی طرح انقلاب گرما، اعتدال خریف، انقلاب سرما اور پھر آنیوالے اعتدال ربیع پر سورج کے اوسط طول بلدوں کو علی الترتیب ل۱، ل۲، ل۳، ل۴ سے تعبیر کریں تو

ل۱ = ۱/۲ π − ۲ ز جم حہ،

ل۲ = π − ۲ ز جب حہ،

ل۳ = ۳/۲ π + ۲ ز جم حہ،

ل۴ = ۲π + ۲ ز جب حہ،

موسموں کی مدتیں ان پانچ اوسط طول بلدوں میں سے ہر متصلہ زوج کے درمیان جو فرق ہے اُس کو جزو ضربی ۳۶۵٫۲۴ \ ۲π سے ضرب دینے سے معلوم ہوتی ہیں — اِس جزو ضربی کی بجائے ک لکھنے سے شمالی نیم کرۂ ارض کے لیے حاصل ہوتا ہے :— (۳۴۶)

دنوں کی تعداد

بہار میں = ک (ل۱ − ل.) = ۹۱٫۳۱۰ − ۲ ز ک (جب حہ + جم حہ)

گرما میں = ک (ل۲ − ل۱) = ۹۱٫۳۱۰ − ۲ ز ک (جب حہ − جم حہ)

خریف میں = ک (ل۳ − ل۲) = ۹۱٫۳۱۰ + ۲ ز ک (جب حہ + جم حہ)

سرما میں = ک (ل۴ − ل۳) = ۹۱٫۳۱۰ + ۲ ز ک (جب حہ − جم حہ)

…(۱)

ز اور حہ کی وہ قیمتیں رکھنے سے جو دفعہ ۳۷ میں دیگئی ہیں حاصل ہوتا ہے

۲ زگ جب حہ = - ۱٫۹۱۰ دن

اور　۲ زگ جم حہ = + ۰٫۳۷۹ ،،

اس لیے اِن چار موسموں کی مدتیں حسب ذیل ہیں

	دن	گھنٹے
بہار	۹۲	۲۰٫۲
گرما	۹۳	۱۴٫۴
خریف	۸۹	۱۸٫۷
سرما	۸۹	۰٫۵

پس ہم دیکھتے ہیں کہ موسم گرما اور بہار باہم ۱۸۶ دن ۱۰٫۶ گھنٹے رہتے ہیں لیکن موسم خریف اور سرما کے باہم صرف ۱۷۸ دن ۱۹٫۲ گھنٹے ہوتے ہیں۔ اس کی الٹی صورت جنوبی نیم کرہ میں ہوتی ہے، وہاں موسم گرما اور بہار باہم ۱۷۸ دن ۱۹٫۲ گھنٹوں کے ہوتے ہیں اور موسم خریف اور سرما باہم ۱۸۶ دن ۱۰٫۶ گھنٹوں کے۔

مثال ۱۔ یہ مانکر کہ عہ یکساں طور پر بڑھتا ہے ثابت کرو کہ آئندہ زمانہ میں چار موسموں کی مدتوں کی حسب ذیل انتہائی حدود ہونگی:۔

$$۹۱٫۳۱۰ \pm ۲ \times ۳۶۵٫۲۴ \times ز \,/\, \pi$$

مثال ۲۔ اگر سال میں دنوں کی تعداد پ ہو اور اگر موسم گرما بہار سے ق دن بڑا اور خریف سے س دن بڑا ہو تو مدار کا خروج المرکز اور قریب ارضی کا طول بلد معلوم کرو۔

دسویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ اس مفروض پر کہ زمین کا مدار ایک تقریباً دائری قطع ناقص ہے اور اوجین اور انقلابین کے خطوط ایک ہی طول بلد رکھتے ہیں ثابت کرو کہ خروج المرکز تقریباً

$$\frac{\text{و}_1 - \text{و}_2}{\text{و}_1 + \text{و}_2}\ \text{مس}^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{سہ}$$

کے مساوی ہے جہاں و₁، و₂ قریب ارضی اور بعید ارضی پر وقت کی مساوات میں فی گھنٹہ تغیرات کو تعبیر کرتے ہیں اور سہ طریق الشمس کا میلان ہے۔ [Math. Trip.]

(۲۴۷)

مثال ۲ ـ کیمبرج میں ایک گھڑی گرینوچ اوسط وقت دکھاتی ہے ـ بتاؤ کہ اس میں کیا وقت تھا جبکہ سورج کا اگلا کنارہ بتاریخ ۱۶ جنوری ۱۸۷۵ء نصف النہار پر پہنچا تھا اگر یہ دیا جائے کہ

کیمبرج کا طول بلد ۲۲ء۵ ثانیہ م

نصف النہار عبور کرنے میں جو وقت لگا ۱ م ۶۲ء۱۰ ثانیہ

وقت کی مساوات ۹ م ۸۸ء۲ ثانیہ

مثال ۳ ـ ثابت کرو کہ بحری جنتری کے وہ خانے جن سے "سورج کے صعود مستقیم کا تغیر فی گھنٹہ" اور "نیم قطر کا وقت جو نصف النہار عبور کرنے میں لگتا ہے" معلوم ہوتے ہیں ایک ساتھ بڑھتے اور گھٹتے ہیں اور اول الذکر مقدار عملاً ثانی الذکر کے مربع کے متناسب ہوتی ہے ـ [Math. Trip. 1.]

مثال ۴ ـ اگر زمین کے مدار کا خروج المرکز ز ہو اور اعتدالین کا خط مدار کے محور اعظم پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ زمین ♈ سے ♎ تک اور ♎ سے ♈ تک حرکت کرنے میں جو اوقات لیتی ہے اُن کا فرق تقریباً ۳۶۵ ز دن ہے ـ

مثال ۵ ـ ثابت کرو کہ مرکز کی بڑی سے بڑی مساوات ۲ ز + ۱۱ ز³\۴۸ ہے اور جب یہ صورت ہو تو

$$\text{و} = \tfrac{1}{2}\,\text{ن} + \tfrac{3}{4}\,\text{ز} + \tfrac{31}{128}\,\text{ز}^3 ،\quad \text{ط} = \tfrac{1}{2}\,\text{ن} - \tfrac{5}{4}\,\text{ز} - \tfrac{25}{384}\,\text{ز}^3 ،$$

$$\text{ع} = \tfrac{1}{2}\,\text{ن} - \tfrac{1}{4}\,\text{ز} - \tfrac{37}{384}\,\text{ز}^3$$

حصۂ اول ختم

اشاریہ

علم ہیئت کروی

حصۂ اول

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

فہرست اصطلاحات

علم ہئیت کروی

حصہ اول

Aberration	ضلالت
Abscissa	فصلہ
Altazimuth	آلہ ارتفاع والسمت
Almucantar	المقنطر
Analogies	تمثیلات
Andromedae	اندرومیدا
Antarctic circle	دائرہ قطب جنوبی
Antinole	ضد شطب
Antipodal	تحت قدمی
Aphelion	اوج
Apex	راس
Apogee	بعید ارضی
Apse	اوج
Aquilæ	عقاب
Arcturus	سماک رامح
Arctic circle	دائرہ قطب شمالی
Aries	حمل
Ascending node	صعودی عقدہ

Asteroids	نجیمہ
Astrograph	نجم نگار، فلک نگار
Autumn	خریف
Autumnal equinox	اعتدال خریف
Capella	عیوق
Cardinal points	اساسی نقطے
Celestial	سماوی
(a) Cephei	عہ قیقاؤس
Centauri	قنطورس
Circuit	دَورہ
Circumpolar	حائط قطبی
Civil year	کاروباری سال
Chrono-meter	وقت پیما
Clock star	گھڑی تارہ
Collimation	توازی گری
Collimating telescope	توازی گر دوربین
Comet	دمدار تارہ
Colatitude	عرض التمام
Conformal representation	ہم شکل تعبیر
Conformal correspondence	ہم شکل تناظر
Convolutions	تغیفے
Counter part	جواب
Corpuscular theory	جسیمیہ نظریہ
Critical stage	فاصل منزل
Culmination	تکبد

Culminate	تکبد کرنا
Current coordinates	رواں محدد
Cusp	قرن
Cycle	دَور
Cyclic	دائری
Cygny	دجاجہ
Declination axis	مَیلی محور
Defective limb	ناقص کنارہ
Declination	مَیل
Deimos	دیموس
Depression	پستی
Differential formula	تفرقی ضابطہ
Descending node	نزولی عقدہ
Dispersion	انتشار
Duplicate ratio	نسبت مثناۃ
Diurnal	یومی
Ellipticity	ناقصیت
Elongation	ابتعاد
Epoch	قرن
Equation of time	وقت کی مساوات
Equinoctial colure	دائرہ اعتدالین
Ephemeris	الفیمیرس
Error of collimation	خطائے توازی گری
Eridani	النہر
Evening star	شام کا ستارہ

Expose	عریاں کرنا
Extrapolation	ورائی ادراج
Eccentric	خارج المرکز
Eye piece	چشمہ
Exterior planet	بیرونی سیارہ
Focal circle	ماسکی دائرہ
First quarter	پہلا ربع
Field of view	میدان نظر
Gearing	گیرائی
Generalized instrument	تعمیمی آلہ
Geocentric	ارض مرکزی
Gun-metal	توپ دھات
Heliometer	شمس پیما
Helio-graph	شمس نگار
Horary motions	ساعت واری حرکتیں
Hour angle	ساعتی زاویہ
Ideal	تصوری کامل
Index error	مظہاری خطا
Inferior planet	سفلی سیارہ
Intergration by parts	تکمل بالحصص
Interpolation	بینی ادراج
Invert	مقلوب کرنا
Inversion	انقلاب
Inverses	مقلوبات
Invariant	غیر متغیرہ

Iris	آیرس
Jupiter	مشتری
Latitude	عرض بلد
Latus-rectum	وتر خاص
Libra	میزان
Leap year	سال کبیسہ
Light equation	نوری مساوات
Limb of the sun	کنارہ (سورج کا)
Longitude	طول بلد
Loxodrome	مساوی المیلان
Lunation	قمریہ
Luni-solar-precession	قمر شمسی استقبال
Major circle	بڑا دائرہ
Mechanism	میکانیت
Millky way	کہکشاں
Minor circle	صغیر دائرہ
Nadir	قدم
Nebeula	سحاب
Nole	شطب
Nutation	کبو
Object glass	دہانہ
Obliquity	میلان
Occultation	احتجاب
Opposition	تقابل
Optical	مناظری

Orbit	مدار
Ordinate	معین
Osculating curve	لثمی منحنی
Pegasus	فرس
Pennumbra	ظل مشوب
Perigee	قریبِ ارضی
Perihelion	حضیض
Periodic time	مدت دوران
Perspective projection	منظری تظلیل
Phobos	فوبوس
Pnotographic plate	عکسی تختی
Photograply	عکاسی
Photometric	ضیاء پیمائی
Pleiades	ثریا
Polaris	قطب تارہ
Position angle	زاویۂ محل
Progression	تقدم
Proper motion	ذاتی حرکت
Quadrantal-triangule	ربعی مثلث
Quadrature	تربیع
Range	سعت
Reading-micoscope	قاری خوردبین
Reappearance	انجلاء
Regression	رجعت
Regulus	قلبِ اسد

Residuals	تفلیات
Retrograde	رجعی
Retrogression	رجعت
Right-ascension	صعود مستقیم
Round numbers	بے کسیر عدد
Satellites	تابع قمر
Sappho	سیفو
Saros	قرن
Sidereal day	کوکبی یوم
Sidereal year	کوکبی سال
Sirius	شعریٰ
Slides	تختی
Solar day	شمسی یوم
Solstices	انقلاب
Solstitial colure	دائرہ انقلابین
Spider lines	تار عنکبوت
Spring	بہار
Stand	ایستادہ
Stationary	مقیم
Stereographic projection	تسطیحی ظلال
Summer	گرما
Sundial	دھوپ گھڑی
Terresteral date line	ارضی تاریخ خط
The first point of Aries	راس الحمل
The first point of Libra	راس المیزان

Transcendental equation	علوی مساوات
Transit	مُرور
Umbra	ظِل محض
Undulatory Theory	موجی نظریہ
Venus	زہرا
Vernal equinox	اعتدال ربیع
Vertex	راس
Winter	سرما
Zenith distance	راسی فاصلہ
Zone	منطقہ

STARS AND CONSTELATIONS

Achernar	آخرالنہر
Acrab	عقرب
Adara	عذرا
Alcor	الخوّار
Alcyone	السیونی
Aldebaran	الدّبران
Alderamin	الذراع الیمین
Algeiba	الجبہ
Algenib	الجنب الفرس
Algol	الغول
Algorab	الغراب
Alioth	الیاتہ
Alkaid	القائد
Alkalurops	الکلوروپس
Alkes	الکاس
Almak	العناق
Alnilam	النظام
Alphard	الفرد
Alphecca	الفکہ
Alpheratz	الفرس

Alphirk	اَلفِرق
Alrai	اَلراعی
Alruccabah	اَلرکبہ
Alshain	اَلشاہین
Altair	اَلطائر
Antares	اَنٹیرس
Arcturus	آرکیورس
Arneb	اَرنب
Asterope	اَسٹیروپی
Atlas	اَٹلس
Azimech	اَلسّماک
Baten Kaitos	بطن القیطوس
Bellatrix	بیلاٹرکس
Benetnasch	بنات النعش
Betelgeuse	اَبط الجوزا
Canopus	سہیل
Capella	عیوق
Caph	کف
Castor	کیسٹر
Cor Caroli	قلب چارلس
Cor Hydrae	قلب الحیّہ
Cor Leonis	قلب اسد
Cor Scorpinnis	قلب عقرب
Cor Serpentis	قلب شجاع
Denebola	ذنب الاسد

Diphada		ضفدع
Dubhe		دُبّہ
Electra		الکٹرا
Enif		انف الفرس
Errai		الراعی
Etamin		التنین
Fom		فم
Fomalhaut		فم الحوت
Giedi		جدی
Gomeisa		غمیصا
Hamal		حمل
Homam		ہُمام
Hyades		ہیاڈیس
Izar		ازار
Kaitain		خیطین
Kaus Australis		قوس جنوبی
Kelb al Rai		کلب الراعی
Kocab		کوکب
Kaus Borealis		قوس شمالی
Maia		مایا، میتہ
Markab		مرکب
Mebsuta		مبسوطہ
Megrez	δ Ursae Majoris	مغرز
Menkalinan	β Aurigae	
Menkar	α Ceti	منخر

Merak	β Andromedae	مَراق
Merope		میروپی
Mesarthim	γ Arietis	مِشارتم (زبرانی)
Mintaka	δ Orionis	منطقہ
Mira	o Ceti	میرا
Mirac, see Merak	Andromedae	مراق
Mirfak	α Persei	مرفق
Mirzam	β Canis Majoris	مرزم
Mizar	ζ Ursae Majoris	مئزر
Muphrid	η Bootis	مفرد
Nath	β Tauri	
Nekkar	α Bootis	نقار
Okda	α Piscrum	عقدہ
Phakt	α Columbae	فاختہ
Phecda	γ Ursae Majoris	فخذ
Pleiades		ثریا۔پروین
Pleione	28 Tauri	پلئونی
Polaris		قطب تارا
Pollux		پالکس (موخرالتواس)
Praesepe		پریسیپی
Prima Giedi	α Capricorni	راس الجدی
Procyon		شعرالشامیہ
Ras Algethi	α Herculis	راس الجاثی
Ras Alhague	α Ophiuchi	راس الحاوی
Rastaban	β Draconis	راس الثعبان

Regulus	α Leonis	قلب الاسد
Rigel	β Orionis	رجل
Rotanev	β Delphini	روٹانیو
Sadachbia	γ Aquarii	سعدالاخبیہ
Sadalmelik	β Aquarii	سعدالملک
Sadalsud	Aquarii	سعدالسعود
Scheat	β Pegasi	شیبۃ
Schedar	α Cassiopeiae	صدر
Sheliak	β Lyrae	شلیاق
Sheratan	β Arietes	شرطان
Sirius		شعریٰ
Sirrah	α Andromedae	سرّہ
Skat	δ Aquarii	
Spica	α Virginis	سُنبلا
Sulaphat	γ Lyrac	سلحفاۃ
Sualocin	α Delphini	سوالوسین
Talitha	ι Ursae Majoris	
Tarazed	γ Aquilac	طائرالصید
Taygeta	ε Tauri	ٹیجیٹا
Thuban	α Draconis	ثعبان
Unukalhay	α Serpentis	عنق الحیۃ
Vega	α Lyrac	نسرواقع
Vindemiatrix or Almuridin	ε Virginis	
Wasat	δ Geminorum	وسط
Yed	δ Ophiuchi	ید

Zaurak	γ Eridani	زورق
Zawijah	β Virginis	زاویہ
Zozca Zozmn	δ Leonis	
Zuben el Genubi	α Libræ	الزبان الجنوبی
Zuben el Hakarbi		الزبان العقربی
Zuben el Chamali	β Libræ	الزبان الشمالی

Andromeda	مراۃ المسلسلہ
Antlia	ہوا پمپ
Apus	طائر فردوس
Aquila	عقاب
Argo	السفینہ
Auriga	ممسک الاعنہ
Camelopardus	زراف
Cassiopeia	ذات الکرسی
Cetus	قیطس
Chamacleon	حربا
Circinus	پرکار
Columba	حمامہ
Coma Berenices	شعر برنیسی
Corona Australis	اکلیل جنوبی
Corona Borealis	اکلیل شمالی
Corvus	غراب
Crater	فم البرکان
Crux	صلیب
Delphinus	دلفین
Dorado	تیغ ماہی
Draco	تنین
Equnleus	فرس اصغر
Grus	حمالہ
Indus	انڈس
Mensa	میزہ

Microscopium	خوردبینہ
Oetans	مثمنہ
Puppis	سُکان، دبوسہ
Pypxsi	کمپاس
Sextans	مسدسہ
Telescopium	دوربینہ
Toucanus	ٹوکانہ
Triangulum	مثلثہ
Triangulum Australe	مثلثہ جنوبی
Vela	شراع، بادبان
Eros	ایراس
a centauri	ع قنطورس
Lalande	لالاند
Cygni	دجاجہ
Cordoba	قرطبہ
Enceladus	انقلادوس
Equinus (the little horse)	قرص اصغر
Eridanus (the peaer)	النہر
Errai	الراعی
V cephii	جہ قیقاوس
Etanin of draconis	اتنین
Flora	فلورا
Foranx (the furnace)	فرنیکس
Gemini (the twins)	توامین
Giedi	جدی

Hebe	ہیب
Hercules	ہرقلس
Homam	ہمام
Horlogium (the clock)	ہاردلوگیم
Hyads	حیاڈیس
Hydra (the sea serpent)	
Hydrus	
Iklil	اکلیل
Scorpii	العقرب
Iapetus	آپیتس
Juno	جونو
Kaffaljidhma	کف الجذما
Ceti	قیطوس
Urse mindres	دب اصغر
Lacerta (the lizard)	لالرٹا
Leo (the lion)	اسد
Leo minor	اسد اصغر
Leonids	اسدی
Lepus (the hare)	ارنب
Lupus (the wolf)	سبع (بھیڑیا)
Lynse	فہد (سیاہ گوش)
Lyra (the lyre)	سلیاق
Maia	میا
Malus	مالوس
Mirfuk	مرفق

Pegasi	
Herculis	ہرقلس
Geminorum	جوزا
Ceti	قیطس
Merope (28 Tauri)	میروپ
Mimas	میماس
Orionis	جبا
Persei, perseus	پرسیاوش
Canis magoria	کلب اکبر
Monoceros	گینڈا
Musca (the fly)	مکھی
Bull's Horn	قرن الثور
Leporis	الخل
Norma	نارمہ
Oberon	اوبی ران
Bootis	عوا
Pullas	پالس
Pavo	طاؤس
Pegasus	پردار گھوڑا
Phobos	فوبوس
Phoenix	فینکس
Phurud	الفرد
Pictor	مصور
Pisces	حوت
Pisces Australis	حوت جنوبی

Pleiades	ثریا
Pollux	راس التوام
Virgi nis	العذرا
Praesepe	خان النور
Procyon (canis minoris)	(کلب اصغر)
Rasalasad	راس الاسد
Ras Algethi	راس الجاشی
Ras Alhague	راس الحاوی
Regulas	قلب اسد
Reticulum	شبکہ
Regel	رجل الجوما
Quarii	دلو
Sadal suud	سعد السعود
Sagitta	سہم
Sagitarius	قوس تیرانداز
Sculptor	بت گر
Serpens	اعیہ
Spica	العذرا
Titan	طیطان
Vasta	وسطار
Volans	ہمکہ طیارہ
Vulpecula	ثعلب